第二章 平面向量及其应用

§1 从位移、速度、力到向量

1.1 位移、速度、力与向量的概念+1.2 向量的基本关系

对点上分

1. C 【解析】在①长度,②弹力,③速度,④加速度中,既有大小又有方向的是②弹力,③速度,④加速度,它们是向量;①长度只有大小没有方向,不是向量. **故 C 正确.**

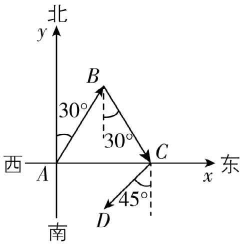
2. D 【解析】由向量的几何表示知,$\boldsymbol{a}$ 也可以用 $\overrightarrow{MN}$ 表示,$\boldsymbol{a}$ 的起点为 M,终点为 N,方向是由 M 指向 N,**故 A,B,C 正确**,**D 错误.**

3. C 【解析】零向量的模为 0,不是正实数,**故 A 错误;**

模为 1 个单位长度的向量叫单位向量,**故 C 正确;**

向量是既有大小又有方向的量,不是实数,**故 B,D 错误.**

4.【解】如图,以 A 为原点,正东方向为 x 轴正方向,正北方向为 y 轴正方向建立直角坐标系.



由题意知点 B 在第一象限,点 C 在 x 轴正半轴上,点 D 在第四象限,向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$ 如图所示.

向量 $\overrightarrow{AB}$ 表示从 A 地到 B 地的位移;向量 $\overrightarrow{BC}$ 表示从 B 地到 C 地的位移;向量 $\overrightarrow{CD}$ 表示从 C 地到 D 地的位移.

规律总结 用有向线段表示向量时,先确定起点,再确定方向,最后根据向量的模确定有向线段的终点.

5. C 【解析】对于 A,$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DC}|$,都等于线段 CD 的长度,故正确;

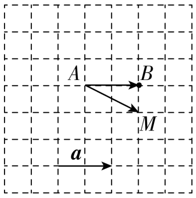
对于 B，e_1，e_2 是单位向量，则 $|e_1|=|e_2|=1$，故正确；

对于 C，向量的模可以比较大小，但是向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 不能比较大小，故错误；

对于 D，两个相同的向量的模相等，故正确.

6. A 【解析】由 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|$ 得 $\angle ABC=\angle OCB=30°$. 因为 C 为半圆上的点，所以 $\angle ACB=90°$，所以 $|\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=1$. **故 A 正确.**

7. 【解】(1) 如图，根据向量相等的定义，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，长度相等，即 $|\overrightarrow{AB}|=2$，即可得到有向线段 $\overrightarrow{AB}$.



(2) 满足条件的有向线段 $\overrightarrow{AM}$ 如图所示（画法不唯一），点 M 的轨迹是以点 A 为圆心，半径 $r=\sqrt{5}$ 的圆.

(3) 根据 $|\overrightarrow{AB}|=2<r=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{5}$，可知 B 在以 A 为圆心，半径 $r=\sqrt{5}$ 的圆内，则 $|\overrightarrow{BM}|_{\max}=2+\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{BM}|_{\min}=\sqrt{5}-2$.

8. B 【解析】相等的非零向量的方向相同、长度相等，故两个相等的非零向量同起点必同终点，**即①正确；**

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 只能说明 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线的，不能保证 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相等向量或相反向量，**即②错误；**

当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$ 时，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 是非零向量，则不能确定 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，**即③错误.**

综上，正确命题的个数是 1. **故 B 正确.**

易错警示 **与向量共线有关的命题判断中易忽略零向量致错**

我们知道，零向量与任意向量共线，因此在判断与向量共线有关的命题真假时，如果没有明确说明向量是非零向量，一定要考虑某个向量是零向量的情况，不要直接利用我们已学的一些平行知识判断，避免造成错误.

归纳总结 (1)非零共线向量要求方向相同或相反,长度没有要求.

(2)相等向量的方向相同且长度相等.

(3)单位向量只要求其长度为 1 个单位长度.

(4)零向量的长度为 0,方向可以是任意的,它与任意向量平行. $|\boldsymbol{a}|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

9. C

攻略上分 本题 B,C,D 选项需要判断向量是否共线、相等,可用通法攻略 13 中的技巧求解.

【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$,$CEFG$,$CGHD$ 是全等的菱形,$\therefore \angle DCG+\angle GCE=180°$,即 D,C,E 三点共线,$AB=EF$,$CD=FG$,$AB/\!/DE/\!/HF$,即 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{EF}|$,$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{FG}$,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{FH}$ 共线,**故 A,B,D 正确;**

若 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{EH}$ 共线,则必有 $\angle BDC=\angle HED$,即 $\angle GCE=2\angle BDC=2\angle HED$,该条件不一定成立,如 $\angle GCE=90°$ 时,$\angle HED\neq 45°$,故 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{EH}$ 共线不一定成立,**故 C 错误.**

规律点拨 共线向量的四个理解

(1)平行直线不包含重合的情况,平行向量是可以重合的.

(2)共线向量不一定是相等向量,但相等向量一定是共线向量.

(3)向量相等具有传递性,向量平行不具有传递性,但是非零向量的平行具有传递性.

(4)判断共线向量的有关表述的正误时,一定要注意题干是否对"非零"作出限定.

10. D 【解析】若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在直线重合,且 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是单位向量,则 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 有可能为相等向量或相反向量,但不能确定它们是否一定是相等向量,即不能推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 同向且模相等,但因为向量是可以自由移动的,不能保证 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在直线重合,所以"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在直线重合"是"$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$"的既不充分也不必要条件. **故 D 正确.**

11. (1)【解】根据题意,与向量 $\overrightarrow{FC}$ 共线的向量为 $\overrightarrow{CF}$,$\overrightarrow{FB}$,$\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{EA}$,$\overrightarrow{ED}$,

$\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DA}$.

(2)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,且 E,F 分别为边 AD,BC 的中点,

$\therefore BF=ED$,且 $BF//ED$.

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形,

$\therefore BE=FD$,且 $BE//FD$,$\therefore \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}$.

12. D 【解析】因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,$A=\frac{\pi}{2}$,所以 $B=\frac{\pi}{4}$,故向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为$\frac{3\pi}{4}$. **故 D 正确.**

13.【解】(1)由题意得 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,$AD=CD=BD=BC$,$\angle A=\frac{\pi}{6}$,所以 $\angle DBA=\angle A=\frac{\pi}{6}$,所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 的夹角为$\frac{5\pi}{6}$.

(2)由题意得 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,$AD=CD=BD=BC$,$\angle C=\frac{\pi}{3}$,所以 $\angle BDC=\angle C=\frac{\pi}{3}$,所以 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 的夹角为$\frac{2\pi}{3}$.

§1 节测上分

1. CD 【解析】单位向量的方向不一定相同,故单位向量不一定相等,**故 A 错误**;

取非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直,此时满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,但 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 不成立,**故 B 错误**;

模为 0 的向量为零向量,规定零向量与任一向量共线,也与任一向量垂直,**故 C,D 正确.**

2. B 【解析】$\because O$ 是正三角形 ABC 的中心,$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 分别是以三角形的中心和顶点为起点和终点的向量,$\therefore$ 点 O 到三个顶点的距离相等,故 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{OC}|$,但是向量 $\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO},\overrightarrow{OC}$ 不是相同的向量,也不是共线向量,也不是起点相同的向量,**故 B 正确.**

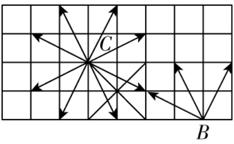
3. D 【解析】由 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD},|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$知,四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分且相等,所以四边形 $ABCD$ 为矩形,**故 D 正确.**

4. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{e}$　$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{e}$　$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$

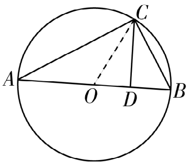
【解析】由题图可知,$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}//\boldsymbol{e}$,因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 是共线向量,并且方向相反;$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 是共线向量,并且方向相反. 显然 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$,$|\boldsymbol{d}|=\sqrt{5}$,$|\boldsymbol{e}|=2\sqrt{2}$,

因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 的模相等.

5. 11 【解析】马在 B 处有 3 个位置可走，在 C 处有 8 个位置可走，如图，以 B 为起点作向量，共 3 个；以 C 为起点作向量，共 8 个，所以共有 11 个.



6. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\frac{5\pi}{6}$ 【解析】由题意知，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，$CD\perp AB$，连接 CO，如图所示.



由圆的性质知，$\angle DOC=2\angle BAC=\frac{\pi}{3}$.

因为圆 O 的周长是 2π，所以半径 $OC=1$，所以 $|\overrightarrow{CD}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 Rt $\triangle CAD$ 中，$\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle ACD=\frac{\pi}{3}$.

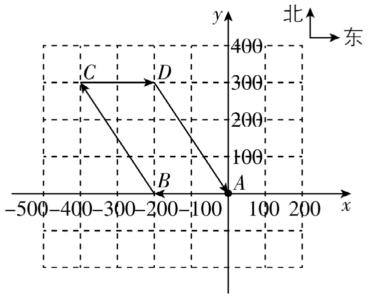
又因为 AB 是圆 O 的直径，所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle DCB=\angle ACB-\angle ACD=\frac{\pi}{6}$，所以 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$.

7.【解】(1) 根据题意可知，点 B 在坐标系中的坐标为 $(-200,0)$.

因为点 D 在点 B 的正北方，点 C 在点 D 的正西方，所以 $BD\perp AB$，$CD\perp BD$.

又 $|\overrightarrow{CB}|=100\sqrt{13}$ m，$|\overrightarrow{CD}|=200$ m，所以 $|\overrightarrow{DB}|=300$ m，即 D，C 两点在坐标系中的坐标分别为 $(-200,300)$，$(-400,300)$.

所以可作出向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$，如图所示.



(2) 由题意可知，四边形 $ABCD$ 为平行四

边形,所以 $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{CB}|=100\sqrt{13}$ m.

8.【证明】因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$ 且 $AB/\!/CD$,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 所以 $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{CB}|$ 且 $DA/\!/CB$. 又因为 $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}$,所以 $|\overrightarrow{CN}|=|\overrightarrow{MA}|$ 且 $CN/\!/MA$,所以四边形 $CNAM$ 是平行四边形,所以 $|\overrightarrow{CM}|=|\overrightarrow{NA}|$,所以 $|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{DN}|$,而 $DN/\!/BM$,即 $\overrightarrow{DN}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的模相等且方向相同,所以 $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$.

§2　从位移的合成到向量的加减法

2.1　向量的加法+

2.2　向量的减法

对点上分

1. B　【解析】根据向量加法的三角形法则,可得 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SQ}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SQ}=\overrightarrow{OQ}$,故 B 正确.

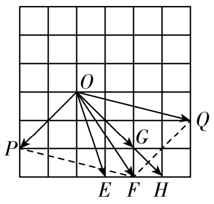
2. A　【解析】在平行四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$,所以 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$,故 A 正确.

方法总结　向量求和的一般步骤

(1)应用三角形法则:①平移向量使之"首尾相接",即第一个向量的终点与第二个向量的起点重合;②以第一个向量的起点为起点,并以第二个向量的终点为终点的向量,即为两向量的和向量.

(2)应用平行四边形法则:①平移两个不共线的向量使之共起点;②以表示这两个已知向量的有向线段为邻边作平行四边形;③在平行四边形中,与两向量共起点的对角线表示的向量,即为两向量的和向量.

3. B　【解析】以 OP,OQ 为邻边作平行四边形,可知 OF 为所作平行四边形的对角线,由平行四边形法则可知,$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OF}$. 故 B 正确.



4. B　【解析】$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$. 故 B 正确.

5. B 【解析】$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$. 故 B 正确.

6.【解】如题图,因为四边形 $ACDE$ 是平行四边形,且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,所以 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,故由三角形法则得 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

方法总结 用几何图形中已知向量表示未知向量的方法

(1)观察待表示的向量位置;

(2)寻找相应的平行四边形或三角形;

(3)运用法则找关系,化简得结果.

在求解时,要注意以下三点:

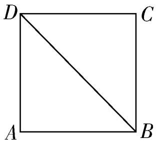
(1)注意相等向量、相反向量、共线向量与构成三角形的三个向量之间的关系;

(2)注意应用向量加法、减法的几何意义以及它们的运算律;

(3)注意在封闭图形中利用多边形法则.

7. D 【解析】由于 $|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|=1$, $|\overrightarrow{BC}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,则 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$,即 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2$,所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 故 D 正确.

8. A 【解析】如图,由正方形 $ABCD$ 的边长为 2,则 $BD=2\sqrt{2}$,所以 $|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}|=2|\overrightarrow{BD}|=4\sqrt{2}$. 故 A 正确.



9. BCD

攻略上分 利用大招攻略 15 向量三角不等式判断即可.

【解析】对于 A, $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 一定不成立;对于 B,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时成立;对于 C,当非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,方向相反,且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$ 时成立;对于 D,当非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,且方向相同时成立. 故 B, C, D 正确.

归纳总结 向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模及方向

(1)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的方向都不相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

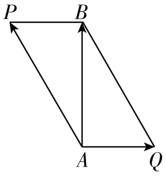
(2)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的方向相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；若 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$；若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 为零向量.

(4)对于方向不定的非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|_{\max}=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|_{\min}=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$.

10. 北偏西 30°方向　20 km/h

攻略上分 本题需利用通法攻略 14 中的平行四边形法则作图，进而确定小船的行驶方向及小船在静水中的速度大小.



【解析】如图所示，$\overrightarrow{AQ}$ 的方向代表水流方向，且 $|\overrightarrow{AQ}|=10$，$\overrightarrow{AP}$ 的方向即为小船行驶的方向，且 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AQ}$，$|\overrightarrow{AB}|=10\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AQ}$，则 $\tan\angle ABQ=\frac{AQ}{AB}=\frac{10}{10\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\angle ABQ=\frac{\pi}{6}$，故 $\angle BAP=\angle ABQ=\frac{\pi}{6}$，小船行驶的方向为北偏西 30°方向，且 $|\overrightarrow{AP}|=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{\cos\frac{\pi}{6}}=20$，即小船在静水中的行驶速度为 20 km/h.

能力上分

1. D　【解析】$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BQ})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{PQ}$；

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{QC})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{QC})=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PQ}$；

$\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PQ}$；

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{BQ}$，显然由 $\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{BQ}$ 得不出 $\overrightarrow{PQ}$，即不能化简为 $\overrightarrow{PQ}$ 的式子是 D.

故 D 正确.

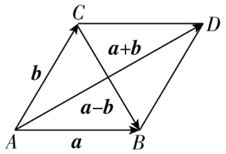
2. D　【解析】根据向量加法的平行四边形法则及向量减法的几何意义，即可判断

A,B,C 错误;

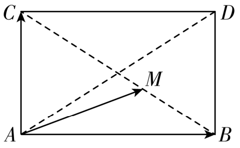
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$, $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\overrightarrow{DC}$;而 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{0}$,故 D 正确.

3. A 【解析】若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向共线,由 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$,可得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=7$;若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线,由 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$,可得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$. 所以由"向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线"不能推出"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=7$". 若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=7$, $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,所以由"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=7$"能推出"向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线". 因此,"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=7$"是"向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线"的充分不必要条件. 故 A 正确.

4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,以 AB, AC 为邻边作平行四边形 $ABDC$,连接 AD, BC,如图,当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 时,$\triangle ABC$ 为等边三角形,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 为线段 AD 的长度,所以 $\frac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



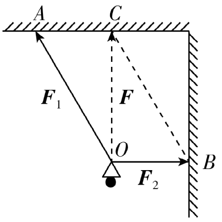
5. $\frac{12}{5}$ 【解析】如图,作出平行四边形 $ABDC$,连接 AD, BC,因为 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$,所以 $BC=AD$,所以平行四边形 $ABDC$ 是矩形. 由于 $|\overrightarrow{AB}|=4$, $|\overrightarrow{AC}|=3$,故 $|\overrightarrow{BC}|=5$,当 $AM\perp BC$ 时,$|\overrightarrow{AM}|$ 取得最小值,最小值为 $\frac{4\times3}{5}=\frac{12}{5}$.



规律总结 (1)在平行四边形 $ABCD$ 中,记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. ①对角线的平方和等于四条边的平方和,即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$;②若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则平行四边形 $ABCD$ 为矩形;③若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则平行四边形 $ABCD$ 为菱形;④若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,则平行四边形 $ABCD$ 是 $\angle ABC=60°$ 的菱形;⑤若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则平行四边形 $ABCD$ 是 $\angle DAB=60°$ 的菱形.

(2)一般将向量放在具体的几何图形中,常见的有三角形、四边形(平行四边形、矩形、菱形)及正六边形等.

6. $6\sqrt{3}$ N　竖直向上　【解析】如图，以 OA，OB 为邻边作平行四边形 $BOAC$，连接 OC，设 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{F}$，则 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}$，即 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，由题知 $\angle OAC=60°$，$|\overrightarrow{OA}|=12$，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OB}|=6$，$\therefore \angle ACO=90°$，$|\overrightarrow{OC}|=6\sqrt{3}$. $\therefore$ $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力大小为 $6\sqrt{3}$ N，方向为竖直向上.



7.【证明】因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 E 为 AC，BD 的中点，
可得 $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{ED}$，
所以 $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})+(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED})=\boldsymbol{0}$，得证.

8. **攻略上分** 根据题意，利用向量三角不等式求解即可.

【解】易知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.
当 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 同向共线时，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|=3$；
当 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 反向共线时，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|=13$；
当 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不共线时，由 $||\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}||<|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|<|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|$，可得 $3<|\overrightarrow{AB}|<13$.
综上，$|\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围为 $[3,13]$.

§3　从速度的倍数到向量的数乘

3.1　向量的数乘运算+
3.2　向量的数乘与向量共线的关系

对点上分

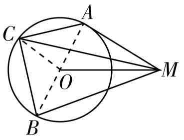
1. C　【解析】当 $\lambda<0$ 时，$|\lambda \boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$ 不成立，故 A 错误；
$|\lambda \boldsymbol{a}|$ 是一个非负实数，而 $|\lambda|\boldsymbol{a}$ 是一个向量，故 B 错误；
当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$|\lambda \boldsymbol{a}|=0$，故 D 错误.
故 C 正确.

2. D　【解析】$\because$ C 在线段 AB 上且 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{3}{7}$，
$\therefore AC=\dfrac{3}{10}AB$，$BC=\dfrac{7}{10}AB$，则 $\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{BC}=\frac{7}{10}\overrightarrow{BA}$，故 A，B 错误；

$\overrightarrow{BC}=\frac{7}{10}\overrightarrow{BA}=-\frac{7}{10}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{10}\overrightarrow{BA}$，故 C 错误，D 正确.

3. C 【解析】连接 AB,OC，如图所示.



因为 $AC\perp BC$，所以 AB 为圆 O 的一条直径，故 O 为 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})=2\overrightarrow{MO}$，所以 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|=|2\overrightarrow{MO}+2(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})|=|4\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{OC}|\leqslant 4|\overrightarrow{MO}|+2|\overrightarrow{OC}|=4\times2+2\times1=10$，当且仅当点 M,O,C 共线且 $\overrightarrow{MO}$，$\overrightarrow{OC}$ 同向时，等号成立，因此 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|$ 的最大值为 10. **故 C 正确.**

4. 【解】(1) $\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right]=\frac{2}{3}[(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]=\frac{2}{3}(3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$.

(2) 因为 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})-4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$.

提示：移项应改变符号

5. A

攻略上分 易知 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\triangle ACD$ 中，可先用 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CD}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，再根据 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CD}$ 将 $\overrightarrow{CD}$ 用 $\overrightarrow{BC}$ 表示，使 $\overrightarrow{CD}$ 最终可以用 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$ 表示，最后合并“同类项”即可求得结果.

【解析】$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. **故 A 正确.**

6. 【解】(1) $\because \overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

(2) $\because \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，$\therefore \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\left(\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=-\frac{1}{8}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$.

7. D 【解析】$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=3\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}$，即 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，所以 A,C,D 三点共线，**故 D 正确.**

8. D 【解析】由 $5\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{CD}$ 知，$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CD}|$，故此四边形为梯形.

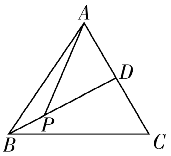
又因为 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$，所以梯形 $ABCD$ 为等腰梯形. **故 D 正确.**

9. C 【解析】因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线，所以 $\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$，即 $\begin{cases}\lambda=m,\\ \lambda k=-1,\end{cases}$ 即 $km+1=0$. **故 C 正确.**

10. B 【解析】如图，因为 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$，所以 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.

又 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\lambda\overrightarrow{AD}$.

因为 P 是线段 BD 上一点，即 B,P,D 三点共线，所以 $\dfrac{2}{3}+2\lambda=1$，



解得 $\lambda=\dfrac{1}{6}$. **故 B 正确.**

11. -2 【解析】依题意 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 是不共线的向量，$k\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线且方向相反，所以 $\begin{cases}k<0,\\ \dfrac{k}{1}=\dfrac{4}{k},\end{cases}$ 解得 $k=-2$.

易错警示 利用向量共线定理求参时忽略方向要求致错

利用向量共线定理求参数时，要注意系数的正负与两向量方向的关系，本题中要求共线的向量方向相反，所以 k 小于 0.

12. 【解】由 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AC}$，所以向量 $\overrightarrow{AC}$ 与向量 $\overrightarrow{AE}$ 共线.

13. 【解】(1) 由题意可知，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\therefore\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

设 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AE}$，则 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{x}{3}\overrightarrow{AE}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

$\because F,O,E$ 三点共线，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}$，$\therefore C,O,E$ 三点共线，$\therefore\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{6}=1$，解得 $x=\dfrac{5}{2}$，

$\therefore AE=\dfrac{2}{5}AB$，$\therefore\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{2}{3}$.

(2) $\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=(1+\lambda)\overrightarrow{AE}$，同理可得 $\overrightarrow{AC}=(1+\mu)\overrightarrow{AF}$，由 (1) 可知，$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，$\therefore\overrightarrow{AO}=\dfrac{1+\lambda}{3}\cdot\overrightarrow{AE}+\dfrac{1+\mu}{6}\overrightarrow{AF}$.

$\because E,O,F$ 三点共线，$\therefore \dfrac{1+\lambda}{3}+\dfrac{1+\mu}{6}=1$，整理得 $2\lambda+\mu=3$，$\therefore \dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}\right)\cdot(2\lambda+\mu)=\dfrac{1}{3}\left(3+\dfrac{\mu}{\lambda}+\dfrac{2\lambda}{\mu}\right)\geqslant\dfrac{1}{3}\left(3+2\sqrt{\dfrac{\mu}{\lambda}\cdot\dfrac{2\lambda}{\mu}}\right)=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $\mu=\sqrt{2}\lambda$，即 $\mu=3\sqrt{2}-3$，$\lambda=\dfrac{6-3\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

$\therefore \dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 的最小值为 $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

能力上分

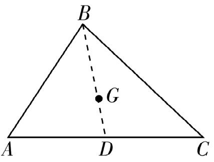
1. D　【解析】因为 $5(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})-4(\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a})-\boldsymbol{c}=-7\boldsymbol{a}-14\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{c}=-7\boldsymbol{a}-14\boldsymbol{b}$.

2. A

攻略上分　本题的解题关键是通过平面向量的运算对 $\overrightarrow{CF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 进行适当变形，再利用三点共线定理求解即可.

【解析】$\overrightarrow{CF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{CB}-(x+y)\overrightarrow{CA}$. 因为 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$，所以 $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$，即 $\overrightarrow{CF}=x\overrightarrow{CB}-3(x+y)\overrightarrow{CE}$. 由 F,B,E 三点共线，可得 $x-3(x+y)=1$，即 $2x+3y=-1$，**故①正确**. 又 D 为 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CD}$，即 $\overrightarrow{CF}=2x\overrightarrow{CD}-(x+y)\overrightarrow{CA}$. 由 F,D,A 三点共线，可得 $2x-(x+y)=1$，即 $x-y=1$，**故③正确**. **故选** A.

3. B　【解析】如图所示，



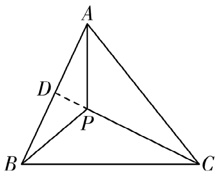
设 D 为 AC 中点，连接 BD，又 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，故 G 是线段 BD 上靠近 D 的三等分点，则 $\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，**故** B **正确**.

4. B　【解析】设 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，则根据向量

加法的平行四边形法则知点 P 在 BC 边上的中线所在的直线上. 设 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, $\overrightarrow{AF}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$,它们都是单位向量,由向量加法的平行四边形法则,可知点 P 也在 $\angle A$ 的平分线上,所以 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形. **故 B 正确.**

5. A 【解析】$2\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$, $\therefore 2(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{CP}$. 设 D 为 AB 边的中点,连接 DP,则 $4\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CP}$.

如图,D,P,C 三点共线,$|\overrightarrow{PD}|=\dfrac{1}{5}\cdot|\overrightarrow{CD}|$, $\therefore S_{\triangle ABP}:S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{5}$. **故 A 正确.**



6. 3 【解析】连接 AP(图略),因为 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}(\lambda>0,\mu>0)$,所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AM}+\dfrac{2}{3\mu}\overrightarrow{AN}$. 因为 M,P,N 三点共线,所以 $\dfrac{1}{3\lambda}+\dfrac{2}{3\mu}=1(\lambda>0,\mu>0)$,所以 $\lambda+2\mu=(\lambda+2\mu)\left(\dfrac{1}{3\lambda}+\dfrac{2}{3\mu}\right)=\dfrac{5}{3}+\dfrac{2\mu}{3\lambda}+\dfrac{2\lambda}{3\mu}\geqslant\dfrac{5}{3}+2\sqrt{\dfrac{2\mu}{3\lambda}\cdot\dfrac{2\lambda}{3\mu}}=\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{3}=3$,当且仅当 $\dfrac{2\mu}{3\lambda}=\dfrac{2\lambda}{3\mu}$,即 $\mu=\lambda=1$ 时等号成立. 所以 $\lambda+2\mu$ 的最小值为 3.

7. (1)【证明】因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+8\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2=12\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2=4(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)=4\overrightarrow{AB}$,所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线. 因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 有公共点 B,所以 A,B,D 三点共线.

(2)【解】因为 $2\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 共线,所以存在实数 μ,使 $2\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\mu(\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)$. 因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,所以 $\begin{cases}2\lambda=\mu,\\1=\lambda\mu,\end{cases}$ 所以 $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)【解】假设 $e_1+\lambda e_2$ 与 λe_1+e_2 共线,则存在实数 m,使 $e_1+\lambda e_2=m(\lambda e_1+e_2)$. 因为 e_1,e_2 不共线,所以 $\begin{cases}1=\lambda m,\\ \lambda=m,\end{cases}$ 所以 $\lambda=\pm1$. 因为 $e_1+\lambda e_2$ 与 λe_1+e_2 不共线,所以 λ 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

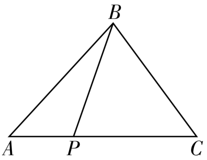
§2～§3 节测上分

1. A 【解析】连接 AE(图略),因为 E 为 BD 的中点,所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}$,所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FE}$. **故 A 正确.**

2. D 【解析】$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. **故 D 正确.**

3. B 【解析】因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$,所以 $\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$,

即 P 为线段 AC 上靠近点 A 的三等分点,如图所示,



所以△PAB 的面积 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=4$. **故 B 正确.**

4. B 【解析】∵ O 是△ABC 的重心,∴ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, ∵ $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, ∴ 点 P 是 BC 边中线的三等分点(非重心). **故 B 正确.**

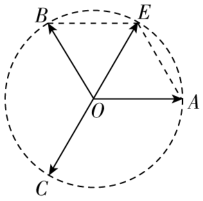
5. AD 【解析】对于 A, $\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{DS}$, **故 A 正确;**

对于 B, $\overrightarrow{ES}-\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{RC}-\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{QC}=-\overrightarrow{PA}$, **故 B 错误;**

对于 C, $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{RD}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{DS}$, 若 $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BQ}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CR}$, 则 $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{DS}=\mathbf{0}$, 不符合题意, **故 C 错误;**

对于 D，$\overrightarrow{ES}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{RC}-\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{RQ}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{QB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{DR}$，**故 D 正确.**

6. A 【解析】因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，所以 $|\boldsymbol{p}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=3$，当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 方向都相同时，等号成立，如图所示，作出 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.



当 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OAEB$，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$，且四边形 $OAEB$ 为菱形. 由 $\angle AOE=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，可得 C,O,E 三点共线，且 $\triangle AOE$ 为等边三角形，$|\overrightarrow{OE}|=|\overrightarrow{OA}|=1$，所以 $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，此时 $|\boldsymbol{p}|=0$. 综上所述，$0\leqslant|\boldsymbol{p}|\leqslant3$，$|\boldsymbol{p}|$ 的取值范围是 $[0,3]$，**故 A 正确.**

7. B 【解析】由题可设 $BG=xBE$，$x\in(0,1)$，则由题意得 $\overrightarrow{BG}=x\overrightarrow{BE}=x(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})=x\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{3}x\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{3}x\overrightarrow{BA}$，

因为 A,G,C 三点共线，所以 $x+\dfrac{2}{3}x=1$，解得 $x=\dfrac{3}{5}$，所以 $\overrightarrow{BG}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BE}$，

所以 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BE}+\mu\overrightarrow{BA}=\dfrac{5}{3}\lambda\overrightarrow{BG}+\mu\overrightarrow{BA}$.

又 A,G,F 三点共线，所以 $\dfrac{5}{3}\lambda+\mu=1$，

所以 $\dfrac{3}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\left(\dfrac{3}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}\right)\left(\dfrac{5}{3}\lambda+\mu\right)=6+\dfrac{3\mu}{\lambda}+\dfrac{5\lambda}{3\mu}\geqslant6+2\sqrt{\dfrac{3\mu}{\lambda}\cdot\dfrac{5\lambda}{3\mu}}=6+2\sqrt{5}$，

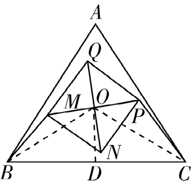
当且仅当 $\dfrac{3\mu}{\lambda}=\dfrac{5\lambda}{3\mu}$，即 $\mu=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\lambda=\dfrac{15-3\sqrt{5}}{20}$ 时等号成立，

故 $\dfrac{3}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 的最小值为 $6+2\sqrt{5}$，**故 B 正确.**

8. 2 【解析】记 BC 的中点为 D，连接 OB，OC，OD，如图，

因为在正方形 $MNPQ$ 中，MP 与 NQ 相交于点 O，所以 O 是 MP 的中点，所以 $\overrightarrow{OM}+$

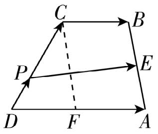
$\overrightarrow{OP}=\mathbf{0}$，则 $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OD}$，



又在正三角形 ABC 中，$BC=2\sqrt{3}$，O 为 $\triangle ABC$ 的中心，所以 $OD=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=1$，

则 $|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CP}|=2|\overrightarrow{OD}|=2$.

9.【解】过点 C 作 $CF//AB$ 交 AD 于点 F，如图，



因为 $\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$，所以 $DA//BC$，$DA=2BC$，又 $CF//AB$，

则四边形 $ABCF$ 是平行四边形，故 $DA=2BC=2AF$，即 F 是 AD 的中点，

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

因为 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}(\lambda\neq0)$，所以 $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}=-\lambda\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}=(1-\lambda)\overrightarrow{DC}$，

所以 $\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=(1-\lambda)\cdot\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\overrightarrow{DC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DA}$.

又因为 $\overrightarrow{PE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$，

所以 $\frac{1}{2}-\lambda=\frac{1}{4}$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$，

所以 P 在线段 DC 上靠近点 D 的四等分点处.

§4　平面向量基本定理及坐标表示

4.1　平面向量基本定理

对点上分

1. B　【解析】对于 A，若存在实数 λ_1,λ_2 使 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0}$ 成立，则 $\lambda_1=\lambda_2=0$，故 A 错误；

对于 B，因为 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是平面 α 内所有向量的一组基，所以平面 α 内任意向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以表示为 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，其中 λ_1，

$\lambda_2\in\mathbf{R}$,**故 B 正确**;

对于 C,因为$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$是平面 α 内所有向量的一组基,所以 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2(\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R})$一定在平面 α 内,**故 C 错误**;

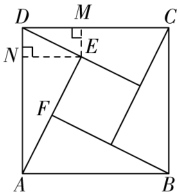
对于 D,对于平面 α 内任意向量 $\boldsymbol{a}$,使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的实数 λ_1,λ_2 有唯一一对,**故 D 错误**.

2. C 【解析】对于 A,零向量与任意向量均共线,所以这两个向量不可以作为基,不满足题意;对于 B,因为 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,所以 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}$,所以这两个向量不可以作为基,不满足题意;对于 C,设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$,则$\begin{cases}1=\lambda,\\-2=\lambda,\end{cases}$所以无解,所以这两个向量不共线,可以作为一组基,满足题意;对于 D,因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$,所以 $\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$,因此这两个向量不可以作为基,不满足题意.

名师点拨 判定两个向量能否构成基,主要看这两个向量是否为非零且不共线向量.一定要注意零向量不能作为基.

3. A 【解析】因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $AB\,/\!/\,CD$,故易知 $\triangle AOM\backsim\triangle COD$,故可得 $\dfrac{OD}{OM}=\dfrac{CD}{AM}=2$,故 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM})=\dfrac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. **故 A 正确**.

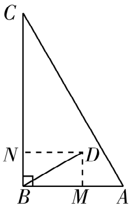
4. B 【解析】如图所示,过点 E 分别作 $EM\perp DC$,$EN\perp AD$,垂足分别为 M,N,可知四边形 $DMEN$ 为矩形.



不妨设 $DE=a>0$,由题意可知 $DE=AF=\dfrac{1}{2}AE=a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中,可得 $AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{5}a$,则 $\sin\angle ADE=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\angle ADE=\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,可得 $DN=DE\cos\angle ADE=\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$,$DM=NE=$

$DE\sin\angle ADE=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$，即 $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{DM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{5}\boldsymbol{m}+\frac{2}{5}\boldsymbol{n}$. **故 B 正确.**

5. D　【解析】如图，过点 D 作 $DM\perp AB$ 交 AB 于点 M，$DN\perp BC$ 交 BC 于点 N，故 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}$.



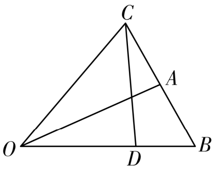
由于 $\angle ABD=30°$，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，不妨设 $BN=a$，则 $BM=\sqrt{3}a$，

故 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=|\overrightarrow{BM}|\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}+|\overrightarrow{BN}|\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\sqrt{3}a\overrightarrow{BA}+\frac{\sqrt{3}a}{3}\overrightarrow{BC}$，

结合 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$ 可得 $\lambda=\sqrt{3}a$，$\mu=\frac{\sqrt{3}a}{3}$，故 $\lambda-3\mu=0$，

故 D 正确.

6.【解】(1) 如图，在 $\triangle COB$ 中，D 为线段 OB 上靠近点 B 的三等分点，A 为 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}+2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.



因为 $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DB}$，所以 $\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，所以 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}-\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$.

(2) 因为 $\lambda\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA}-\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}=(2+\lambda)\overrightarrow{OA}-\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}$，且向量 $\overrightarrow{OC}$ 与 $\lambda\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}$ 共线，所以存在 $k\in\mathbf{R}$，使得 $\lambda\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{OC}$，所以 $(2+\lambda)\overrightarrow{OA}-\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}=k(2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$，所以 $\begin{cases}2+\lambda=2k,\\-\frac{5}{3}=-k,\end{cases}$ 解得 $k=\frac{5}{3}$，$\lambda=\frac{4}{3}$，所以 λ 的值为 $\frac{4}{3}$.

能力上分

1. C　【解析】根据题意，可得 $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+$

$\overrightarrow{DH}$,将 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{DH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ 代入,得

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

因为 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$,所以

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{5}{8}\overrightarrow{BC}$. 故 C 正确.

方法总结 利用基表示向量有两种方法,一是借助向量加法、减法、数乘运算的几何意义,将向量集中在封闭的图形中,利用三角形法则或者平行四边形法则快速找到表示法;另一种是通过设参数表示所求向量,根据基表示向量的唯一性列方程(组)求解.

2. $\frac{1}{4}$ 【解析】因为在 $\triangle ABC$ 中,AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,所以 $\angle BAD=\angle DAC\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

又因为 $AC=2AB$,所以由角平分线定理得 $\frac{CD}{CB}=\frac{2}{3}$,

取 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$ 为一组基,则由 H,M,B 三点共线可得 $\overrightarrow{AM}=(1-\lambda)\overrightarrow{AH}+\lambda\overrightarrow{AB}(0<\lambda<1)$ ①,

由 C,D,B 三点共线可得 $\overrightarrow{AD}=(1-\mu)\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AB}(0<\mu<1)$,

即 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\mu(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$,所以 $\overrightarrow{CD}=\mu\overrightarrow{CB}$,

可得 $\mu=\frac{2}{3}$,即 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$②.

因为 M 是 AD 的中点,所以 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$,

①式可化为 $2\overrightarrow{AM}=2(1-\lambda)\overrightarrow{AH}+2\lambda\overrightarrow{AB}$,

即 $\overrightarrow{AD}=2(1-\lambda)\overrightarrow{AH}+2\lambda\overrightarrow{AB}$③.

设 $\frac{AH}{AC}=t(0<t<1)$,则 $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}=2(1-\lambda)t\overrightarrow{AC}+2\lambda\overrightarrow{AB}$④,

联立②④得 $\begin{cases}2\lambda=\frac{2}{3},\\2(1-\lambda)t=\frac{1}{3},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{3},\\t=\frac{1}{4},\end{cases}$ 即 $\frac{AH}{AC}=\frac{1}{4}$.

3.【证明】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AC}(0<\lambda<1)$.

$\because B,R,E$ 三点共线，

$\therefore$ 存在 $t\in(0,1)$，使得 $\overrightarrow{ER}=t\overrightarrow{EB}$，即 $\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AE}$，

$\therefore \overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AE}=t\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(1-t)\boldsymbol{b}$.

$\because \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，故 $\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，

$\therefore t\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(1-t)\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，

$\therefore \begin{cases}t=\lambda,\\ \frac{1}{2}(1-t)=\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{3},\\ t=\frac{1}{3},\end{cases}$

即 $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，同理可得 $\overrightarrow{TC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore AR=RT=TC$.

4.【解】(1) 由已知得 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{ED}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

(2) 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{EM}=\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AP}=\mu\boldsymbol{a}$，连接 AM（图略），$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}=\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{6}\right)\boldsymbol{b}$. 由 P,M,D 三点共线，设 $\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{DP}$，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{AP}+(1-k)\overrightarrow{AD}=k\mu\boldsymbol{a}+(1-k)\boldsymbol{b}$，

$\therefore \begin{cases}k\mu=\frac{\lambda}{2},\\ 1-k=\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{6},\end{cases}$ $\therefore \mu=\frac{3\lambda}{5-3\lambda}$.

$\because$ 点 P 在线段 AG（不含端点）上，$\therefore \mu=\frac{3\lambda}{5-3\lambda}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\therefore \lambda\in\left(0,\frac{5}{9}\right)$，$\therefore 3\lambda^2+\frac{2}{1+\mu}=3\lambda^2-\frac{6}{5}\lambda+2=3\left(\lambda-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{47}{25}$，当 $\lambda\in\left(0,\frac{5}{9}\right)$ 时，$3\lambda^2+\frac{2}{1+\mu}\in\left[\frac{47}{25},\frac{61}{27}\right)$.

$\therefore 3\lambda^2+\frac{2}{1+\mu}$ 的取值范围是 $\left[\frac{47}{25},\frac{61}{27}\right)$.

5.【解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由 $BE=2AE$，$DC=$

$2BD$，可得 $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，

若 $\overrightarrow{EP}=t\overrightarrow{EC}(0<t<1)$，则 $\overrightarrow{BP}=(1-t)\overrightarrow{BE}+t\overrightarrow{BC}=(1-t)\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+t\cdot3\overrightarrow{BD}$，

又因为 P,A,D 三点共线，所以 $\frac{2}{3}(1-t)+3t=1$，解得 $t=\frac{1}{7}$.

所以实数 t 的值为 $\frac{1}{7}$.

(2)由(1)知，$\overrightarrow{BP}=(1-t)\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC}$，

且 $t=\frac{1}{7}$，则 $\overrightarrow{BP}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{BC}$，

因为 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{b}$，所以 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{7}\boldsymbol{a}+\frac{4}{7}\boldsymbol{b}$.

(3)设 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AC}=x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(0<x<1)$，所以 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=x\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{b}$，

因为 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{7}\boldsymbol{a}+\frac{4}{7}\boldsymbol{b}$，且 B,P,F 三点共线，所以 $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BF}(0<k<1)$，则 $\overrightarrow{BP}=kx\boldsymbol{a}+k(1-x)\boldsymbol{b}$，

所以 $\begin{cases}\frac{1}{7}=kx,\\ \frac{4}{7}=k(1-x),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{5},\\ k=\frac{5}{7},\end{cases}$ 所以点 F 满足 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$，即点 F 为边 AC 上靠近 A 的五等分点.

4.2　平面向量及运算的坐标表示

对点上分

1. BD　【解析】同一个向量，无论位置在哪里，坐标都一样，**故A 错误，D 正确**；
从原点出发的向量，其终点坐标与向量的坐标相同，**故 B 正确**；
以点 A 为终点的向量有无数个，它们不一定全相等，**故 C 错误**.

2. C　【解析】记 O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j},\overrightarrow{OB}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，**故 C 正确**.

3. B　【解析】因为 $A(3,1),B(-2,2)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(-5,1)$. 因为 O 是坐标原点，所以 $\overrightarrow{OA}=(3,1)$，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=(-2,2)$，**故 B 正确**.

4. B　【解析】设 O 为坐标原点，$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-(-1,2)=(3,-6)$，

$\therefore \overrightarrow{OB}=(-1,2)+(3,-6)=(2,-4)$，

$\therefore B(2,-4)$，**故 B 正确.**

5. A　【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(1,-6)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0)$，所以 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(-2,-6)$，**故 A 正确.**

6. BD　【解析】设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$. 因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $-2x-y=0$，可化为 $y=-2x$ ①. 又因为 $|\boldsymbol{b}|=4|\boldsymbol{a}|$，所以 $\sqrt{x^2+y^2}=4\times\sqrt{1^2+(-2)^2}$，可化为 $x^2+y^2=80$ ②.

由①②解得 $\begin{cases}x=4,\\y=-8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-4,\\y=8,\end{cases}$

即 $\boldsymbol{b}$ 可能是 $(4,-8)$，也可能是 $(-4,8)$.

故 B，D 正确.

7. ABD　【解析】由向量共线的条件可知 **A，B 正确，C 错误；** 对于D，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(6,12)$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,8)$，所以 $\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线.

又因为 AB 与 AC 有公共点 A，所以 A,B,C 三点共线，**故 D 正确.**

8. C　【解析】由题意得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3x,x+4)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(6,10)$. 因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$，所以 $30x=6x+24$，解得 $x=1$，则 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(m,3m)+(2n,2n)=(m+2n,3m+2n)=(5,7)$，即 $\begin{cases}m+2n=5,\\3m+2n=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=2,\end{cases}$ 即 $m+n=3$. **故 C 正确.**

9. 【解】(1) $\because$ 顶点 B,C 的坐标分别是 $(-1,3)$，$(3,4)$，$\therefore \overrightarrow{BC}=(3,4)-(-1,3)=(4,1)$.

(2) 设 $A(x,y)$，$\because D(2,2)$，$\therefore \overrightarrow{AD}=(2-x,2-y)$.

又四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\therefore (2-x,2-y)=(4,1)$，即 $\begin{cases}2-x=4,\\2-y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=1,\end{cases}$ $\therefore$ 顶点 A 的坐标为 $(-2,1)$.

§4 节测上分

1. ABD　【解析】对于 A，假设两向量共线，则 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda(-\boldsymbol{e}_2)$，故 $\begin{cases}0=1,\\\lambda=-1,\end{cases}$ 无解，故

$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $-\boldsymbol{e}_2$ 不共线，可作为一组基，**故 A 正确**；

对于 B，设 $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=t(-6\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2)$，则 $\begin{cases}-6t=3,\\4t=-1,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}t=-\dfrac{1}{2},\\t=-\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 无解，故 $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 和 $-6\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$ 不共线，可作为一组基，**故 B 正确**；

对于 C，$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1$，故 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1$ 共线，故不能作为一组基，**故 C 错误**；

对于 D，设 $\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1=a\boldsymbol{e}_2$，则 $\begin{cases}a=1,\\0=1,\end{cases}$ 无解，故 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1$ 不共线，可作为一组基，**故 D 正确.**

2. B 【解析】由题意可知 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH})=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CE}.$

因为四边形 $EFGH$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{CE}$，所以 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AG}$，所以 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}.$

因为向量 $\overrightarrow{AG}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标为 $(4,2)$，所以 $\overrightarrow{AB}=5\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{AD}=5\boldsymbol{e}_2$.

连接 AH(图略)，因为 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AD}=3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$，所以 $\overrightarrow{AH}$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 下的坐标是 $(3,4)$. **故 B 正确.**

3. AC 【解析】由 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，可得 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，**故 A 正确**；

平面内不共线的两个向量可以作为一组基，由 A 知两向量共线，**故 B 错误**；

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,0)=\boldsymbol{0}$，**故 C 正确**；

$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,2)-(1,-2)=(-2,4)=-2\boldsymbol{a}$，与 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$ 方向相反，**故 D 错误.**

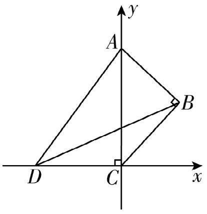
4. A 【解析】由题知 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，设顶点 C 的坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{DC}=(x-2,y-2)$，

所以 $\begin{cases}1=2(x-2),\\2=2(y-2),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\y=3,\end{cases}$ 所以顶点

C 的坐标为$\left(\frac{5}{2},3\right)$. **故 A 正确.**

5. C　【解析】因为向量 $\overrightarrow{OA}=(1,-1)$,$\overrightarrow{OB}=(5,m)$,$\overrightarrow{OC}=(7,3)$,所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,m+1)$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(6,4)$. 若 A,B,C 三点共线,则 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$,所以 $4\times4=6(m+1)$,解得 $m=\frac{5}{3}$. **故 C 正确.**

6. B　【解析】以 C 为坐标原点,CD,CA 所在直线分别为 x 轴、y 轴建立如图所示的平面直角坐标系.



由题意得 $AC=2\sqrt{2}$,则 $A(0,2\sqrt{2})$,$B(\sqrt{2},\sqrt{2})$,$C(0,0)$,$D(-2,0)$,$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AC}=(0,-2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{2}+2,\sqrt{2})$.

因为 $\overrightarrow{DB}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,

所以$\begin{cases}\sqrt{2}+2=\sqrt{2}\lambda,\\ \sqrt{2}=-\sqrt{2}\lambda-2\sqrt{2}\mu,\end{cases}$

解得$\begin{cases}\lambda=\sqrt{2}+1,\\ \mu=-1-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$所以 $\lambda+\mu=\frac{\sqrt{2}}{2}$,**故 B 正确.**

7. 3　【解析】因为$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$是一组基,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,由平面向量基本定理得$\begin{cases}3x-4y=6,\\ 2x-3y=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=6,\\ y=3,\end{cases}$则 $x-y=3$.

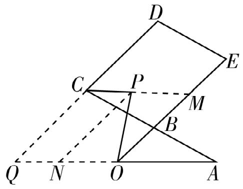
8. $[-1,0]$　【解析】如图,过点 P 作 $PM/\!/AO$ 交 OE 于点 M,延长 AO 交 DC 的延长线于点 Q,作 $PN/\!/OE$ 交 AO 的延长线于点 N,则四边形 $PMON$ 为平行四边形,$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,当 $y=2$ 时,B 为 MO 的中点,又 B 是 AC 的中点,所以 $CM/\!/OA$,则点 P 在 CM 上.

由图可知,当点 P 与点 C 重合时,$\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$,此时 x 取最小值-1;

当点 P 与点 M 重合时,$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OB}$,此时 x 取最大值 0,所以 x 的取值范围是$[-1,$

0].

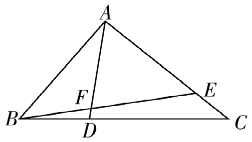


9. $\frac{1}{3}$　9　【解析】因为 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

则 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，故 $x-y=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

如图，因为 B,F,E 三点共线，所以 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AE}(0<\lambda<1)$.



因为 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EC}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{3(1-\lambda)}{4}\overrightarrow{AC}$.

因为 A,F,D 三点共线，所以设 $\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$ $(0<k<1)$，所以 $\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{3(1-\lambda)}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{2k}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\begin{cases}\lambda=\frac{2k}{3},\\ \frac{3(1-\lambda)}{4}=\frac{k}{3},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\frac{9}{10},\\ \lambda=\frac{3}{5},\end{cases}$ 则 $\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{DF}|}=9$.

10.【解】(1) 依题意，$\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}$,

所以 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}\right)=\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

(2)因为 OM 交 AC 于 N,设 $\overrightarrow{ON}=t\overrightarrow{OM}$ $(t\in(0,1))$,由(1)知 $\overrightarrow{ON}=t\overrightarrow{OM}=t\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{5t}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{t}{3}\overrightarrow{OC}$,又 A,C,N 三点共线,

所以$\frac{5t}{6}+\frac{t}{3}=1$,则 $t=\frac{6}{7}$,所以 $\overrightarrow{ON}=6\overrightarrow{NM}$,所以$\frac{|\overrightarrow{ON}|}{|\overrightarrow{MN}|}=6$,即$\frac{ON}{MN}=6$.

(3)由已知 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

因为 D 是线段 BC 上的动点,所以设 $\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{OA}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$,

$\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{OD}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\mu(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD})=(\lambda+\mu x)\overrightarrow{OA}+(\mu-\lambda)\overrightarrow{OC}$.

又 $\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OA}$ 不共线,则有

$\begin{cases}\mu-\lambda=1,\\ \lambda+\mu x=\frac{1}{2},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\lambda=\mu-1,\\ \mu=\frac{3}{2+2x}.\end{cases}$

因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,所以 $1\leqslant x+1\leqslant\frac{3}{2}$,所以 $1\leqslant\mu\leqslant\frac{3}{2}$,所以 $\lambda\mu=\mu(\mu-1)=\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,由二次函数的性质可知函数 $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 在 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ 上单调递增,所以当 $\mu=1$ 时,$(\lambda\mu)_{\min}=0$,当 $\mu=\frac{3}{2}$时,$(\lambda\mu)_{\max}=\frac{3}{4}$,故 $\lambda\mu$ 的取值范围是$\left[0,\frac{3}{4}\right]$.

§5　从力的做功到向量的数量积

5.1　向量的数量积

对点上分

1. C　【解析】根据平面向量数量积的定义知$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$与 $\boldsymbol{a}$ 共线,**故 A 错误**;

当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不一定相等,如 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$ 时它们的数量积为 0,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 可能不相等,**故 B 错误**;

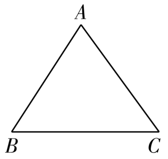
根据平面向量共线定理知,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\exists\lambda\in\mathbf{R}$,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,**故 C 正确**;

根据平面向量数量积的定义知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，所以 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，**故 D 错误.**

2. B 【解析】$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=16-3\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=22$. **故 B 正确.**

易错警示 确定向量夹角时忽略共起点致错

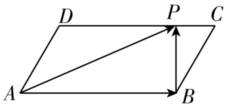
利用定义法求数量积需要明确两个量，一个是模，一个是夹角. 当向量以 $\triangle ABC$ 为背景时，要注意向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角是 $\angle BAC$，而 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 的夹角是 $\pi-\angle BAC$.



3. A 【解析】由已知得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times3\times\frac{1}{3}=1$，所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2|\boldsymbol{a}|^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=2+3\times1-2\times9=-13$. **故 A 正确.**

方法总结 利用定义法求平面向量数量积，①需要明确相关向量的模及夹角，再利用公式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$（$\theta$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角）求解；②若相关向量是两个或两个以上向量的线性运算，先利用数量积的运算律及多项式乘法的法则进行化简.

4. B 【解析】作出图形如图所示.



设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{AB}\ (0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AB}^2=4$.

因为在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=4,AD=2,\angle DAB=60^\circ$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times4\times\cos60^\circ+16\lambda=4$，解得 $\lambda=0$，则点 P 与点 D 重合，

所以 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=4-4=0$，

故 B 正确.

方法总结 解决图形中的数量积问题,要充分利用图形特点及其含有的"已知"向量,这里的"已知"向量是指具有特殊夹角或已知长度的向量等.

5. D 【解析】设 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k$,由题意可知,$k\geqslant 0$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,两边同时平方可得,$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$,即 $2k^2+k-1=0$,解得 $k=\frac{1}{2}$(负值舍去),故 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. 故 D 正确.

6. C 【解析】由 $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 可知 O 为 BC 中点,且 O 为$\triangle ABC$ 的外心,

所以$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{OC}|$,所以$\triangle AOC$ 为等边三角形,$\frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1}{2}$,

所以向量 $\overrightarrow{CA}$ 在向量 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}\rangle\cdot\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. 故 C 正确.

易错警示 忽略投影向量的方向致错

投影向量是一个向量,具有方向. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{c}$ 的方向可能与 $\boldsymbol{b}$ 相同,也可能与 $\boldsymbol{b}$ 相反,还可能是零向量,此时方向是任意的.

方法总结 (1)根据定义,$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的模为 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$,$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的模为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$($\theta$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角);

(2)涉及与平面几何图形有关的向量投影向量的模的问题,应结合投影向量的模的定义、图形特征及平面几何的知识求解.

7. $2\sqrt{3}$ 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$,$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{6}=3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$,

所以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{6\sqrt{3}}{3^2}\boldsymbol{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{a}$,

所以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的模为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}|\boldsymbol{a}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times3=2\sqrt{3}$.

8.【解】$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量,且 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$,则 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\cos\frac{2\pi}{3}=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=2\boldsymbol{e}_1^2-\boldsymbol{e}_2^2+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=2-1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,$\boldsymbol{b}^2=(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2=4\boldsymbol{e}_1^2+\boldsymbol{e}_2^2-4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=4+1-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$,故 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\frac{\frac{1}{2}}{7}\boldsymbol{b}=\frac{1}{14}\boldsymbol{b}$.

易错警示 误认为投影向量为数量致错

投影是一种变换,投影向量是向量不是数量,所以在写投影向量时不要漏写对应的向量.

9. AB 【解析】对于A,若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<0$,**故A正确**;

对于B,因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,又 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量,所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,**故B正确**;

对于C,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时,有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$,此时夹角为0,**故C错误**;

对于D,若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 反向,**故D错误.**

10. A 【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=4$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4-5=-1$,则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4-10+16}=\sqrt{10}$,故 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{2\times\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{20}$. **故A正确.**

方法总结　求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的思路

(1)求向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的关键是计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,在此基础上结合数量积的定义或性质计算 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$(其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角),最后借助 $\theta\in[0,\pi]$,求出 θ 的值.

(2)在个别含有 $|\boldsymbol{a}|$,$|\boldsymbol{b}|$ 与 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的式子中,常利用消元思想计算 $\cos\theta$ 的值,从而得到夹角 θ 的值.

11. C　【解析】设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 因为非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|(t\in\mathbf{R})$ 的最小值为 2,所以 $\boldsymbol{a}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{b}^2=t^2\boldsymbol{b}^2+8t|\boldsymbol{b}|\cos\theta+16$ 的最小值为 $\dfrac{4\times\boldsymbol{b}^2\times16-(8|\boldsymbol{b}|\cos\theta)^2}{4\times\boldsymbol{b}^2}=16-16\cos^2\theta=4$,可得 $\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$,即 $\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,可得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$或 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$. **故 C 正确.**

12. C　【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{19}$,所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=9+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4=19$,解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$,

所以 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4\times9-12\times3+9\times4}=6$. **故 C 正确.**

关键点拨　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ 或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$ 是求向量的模及用向量求解一些长度的依据.

13. B　【解析】已知菱形 $ABCD$ 的边长为 1, $\angle A=60°$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$.

因为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos60°=\dfrac{1}{2}$,所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{19}$. **故 B 正确.**

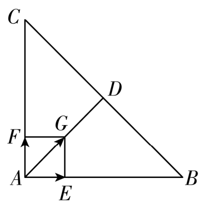
14. D　【解析】由 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,可得 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\dfrac{3}{2}$,当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 反向共线时,等号成立; $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||=\dfrac{1}{2}$,当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 同向共线时,等号成立. 所以 |

$\boldsymbol{b}|$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$. **故 D 正确.**

15. 4 【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=1$, 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$, 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|$. 由 $(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=-8$, 得 $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=-8$, 即 $|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{b}|-8=0$, 解得 $|\boldsymbol{b}|=4$ (负值舍去).

16. A 【解析】乙: $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|$ 等价于 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})^2$, 即 $4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^2$. 因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 所以乙等价于 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$, 即 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 所以甲是乙的充要条件, **故 A 正确.**

17. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 设角 A 的平分线交 BC 于点 D. 因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, 所以 $AB\perp AC$. 设 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\overrightarrow{AE}$, $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AF}$, 记 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AG}$. 因为 $|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AF}|=1$, 故四边形 $AEGF$ 为正方形, 所以 AG 在角 A 的平分线上, 故点 G 在 AD 上. 因为 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$, 所以 $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BC}$, 即 $AG\perp BC$, 故 $AD\perp BC$, $AB=AC$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 所以 $B=\frac{\pi}{4}$.



18. 【解】$\because |\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $45°$, $(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$, $\therefore (\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2=\lambda\times\sqrt{2}\times1\times\cos 45°-2=0$, 解得 $\lambda=2$, $\therefore$ 实数 λ 的值为 2.

19. 【解】(1) 由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}|=3$, 且 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

可得 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=12+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-9=0$, 可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 可得 $\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-3}{\sqrt{2}\times3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$，即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\dfrac{3\pi}{4}$.

(2)由 $|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{17}$ 得 $|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=t^2\boldsymbol{a}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2t^2-6t+9=17$，

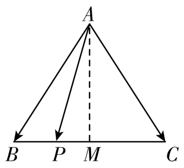
即 $t^2-3t-4=0$，解得 $t=4$ 或 $t=-1$.

能力上分

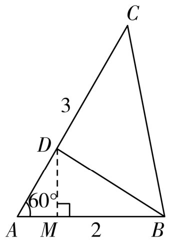
1. D 【解析】$\because$ $\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$，$(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PC})=0$，$\therefore$ $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=0$. 而 $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$ 所在直线一定经过边 AB 的中点，$\therefore$ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$ 所在直线垂直平分边 AB，即 $\triangle ABC$ 的形状一定为等腰三角形，**故 D 正确.**

2. A 【解析】由题意可得，$\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=-18$，**故 A 正确.**

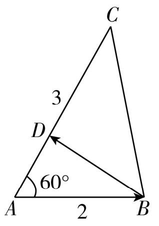
3. A 【解析】如图，取 BC 的中点 M，连接 AM，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，即 $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AP}\cdot2\overrightarrow{AM}=2|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AP}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\rangle=2|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AM}|$. 又因为 $AB=AC=3$，$BC=4$，所以 $AM\perp BC$，$BM=2$，所以 $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{5}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=2|\overrightarrow{AM}|^2=2\times5=10$. **故 A 正确.**



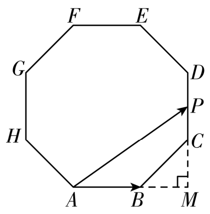
4. D 【解析】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\rangle$，且 $|\overrightarrow{BA}|=2$. 如图，过点 D 作 $DM\perp AB$ 交 AB 于点 M，则 $|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\rangle=|\overrightarrow{BM}|$. 因为 $AD=\dfrac{1}{3}AC=1$，$\angle A=60°$，所以 $AM=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}$，所以 $BM=AB-AM=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-2\times\dfrac{3}{2}=-3$.



一题多解 如图，由 $\angle A=60°$，$AB=2$，$AC=3$，可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle A=2\times3\times\frac{1}{2}=3$. 因为 D 为边 AC 上一点，且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2=\frac{1}{3}\times3-2^2=-3$，故 D 正确.



5. B 【解析】由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle$，显然当点 P 在线段 DC 上时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle$ 最大. 如图，过点 C 作 $CM\perp AB$，交 AB 的延长线于点 M，此时 $|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle=|\overrightarrow{AM}|$. 又 $\angle CBM=\frac{\pi}{4}$，则 $BM=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=\sqrt{2}$，则 $AM=2+\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(2+\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}$，即 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最大值为 $4+2\sqrt{2}$，故 B 正确.



6.【解】(1) 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sqrt{2}\times1\times\cos\frac{\pi}{4}=1$，且 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=(\sqrt{2})^2-4\times1+4\times1^2=2$，所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$.

(2) 由 (1) 知，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$. 因为 $\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})=(t\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA})\cdot(t\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=(t^2-t)\overrightarrow{OA}^2-(t-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2(t^2-t)-(t-1)=2t^2-$

$3t+1=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\geqslant-\frac{1}{8}$，所以当 $t=\frac{3}{4}$ 时，$\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})$ 取得最小值 $-\frac{1}{8}$.

7.【解】(1)因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$.

(2)由(1)可知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$，

因为 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\times3+4\times6+16=52$，所以 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{13}$.

因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3-2\times6+16=7$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

设 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=2\times3-6-16=-16$，

则 $\cos\theta=\frac{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{-16}{2\sqrt{13}\times\sqrt{7}}=-\frac{8\sqrt{91}}{91}$.

(3)因为向量 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，

提示：两个向量的夹角为锐角的充要条件是两个向量的数量积大于0且两个向量不同向共线

所以 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})>0$ 且 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 不同向共线.

由 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2+(3k-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{b}^2=3\times3+(3k-1)\times6-k\times16>0$，

解得 $k>-\frac{3}{2}$.

若 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 同向共线，则存在实数 $t>0$，使得 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=t(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$，即 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a}+kt\boldsymbol{b}$.

所以 $\begin{cases}3=t,\\-1=kt,\end{cases}$ 解得 $k=-\frac{1}{3}$.

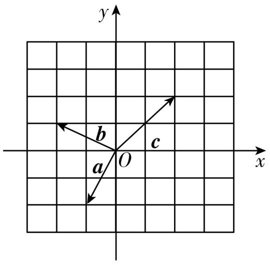
所以当 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 不同向共线时，$k\neq-\frac{1}{3}$.

综上，实数 k 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

5.2 向量数量积的坐标表示+5.3 利用数量积计算长度与角度

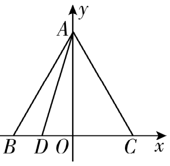
对点上分

1. A 【解析】建立如图所示的平面直角坐标系，可知 $\boldsymbol{a}=(-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,2)$，则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,3)$，所以 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=-2+6=4$. 故 A 正确.



2. A 【解析】设 $C(x,y)$，则 $\overrightarrow{AB}=(3,-6)$，$\overrightarrow{CB}=(2-x,-5-y)$. 因为 C 是 AB 上靠近点 B 的三等分点，所以 $\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，所以 $\begin{cases}1=2-x,\\-2=-5-y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-3.\end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=(-1,1)\cdot(1,-3)=-1-3=-4$. 故 A 正确.

3. D 【解析】如图，建立平面直角坐标系，则 $A(0,2\sqrt{3})$，$B(-2,0)$，$C(2,0)$.



设 $D(x,0)$，$x\in[-2,2]$，则 $\overrightarrow{DA}=(-x,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DB}=(-2-x,0)$，$\overrightarrow{DC}=(2-x,0)$，

$\therefore(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})=(-2-2x)(2-2x)+(2\sqrt{3})^2=4x^2+8$，

$\because x\in[-2,2]$，$\therefore 4x^2+8\in[8,24]$，故 D 正确.

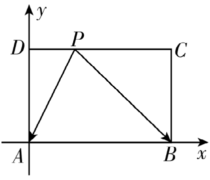
4. B 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,1)+(2,3)=(3,4)$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 故 B 正确.

5. B 【解析】$\because \boldsymbol{a}=(\lambda,2)$，$\boldsymbol{b}=(2\lambda,2-4\lambda)$，$\therefore \boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3\lambda,4-4\lambda)$，$\therefore |\boldsymbol{m}|=$

$$\sqrt{9\lambda^2+16(1-\lambda)^2}=\sqrt{25\left(\lambda-\frac{16}{25}\right)^2+\frac{144}{25}},$$

当 $\lambda=\frac{16}{25}$时，$|\boldsymbol{m}|$取最小值. **故 B 正确.**

6. ABC　【解析】如图，以 A 为坐标原点，AB,AD 所在直线分别为 x,y 轴，建立平面直角坐标系，则 $A(0,0),B(6,0),C(6,4),D(0,4)$.



设 $P(s,t)$，因为 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}$，所以 $(s,t-4)=\lambda(6,0)$，即 $s=6\lambda,t=4$，故 $P(6\lambda,4),\lambda\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$，

则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(-6\lambda,-4)+(6-6\lambda,-4)=(6-12\lambda,-8)$，

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(6-12\lambda)^2+64}=\sqrt{144\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+64}$，因为 $\lambda\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$，易知函数 $y=144\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+64$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ 上单调递增，当 $\lambda=\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=64$，当 $\lambda=0$ 时，$y_{\max}=100$，所以 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(6-12\lambda)^2+64}\in[8,10]$.

故 ABC 正确.

7. A　【解析】$\because$ 向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\therefore|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\therefore |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=2\sqrt{2}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sqrt{6}$，$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because 0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{6}$. **故 A 正确.**

8. $\frac{4}{5}$　$(-\infty,0)\cup(0,5)$　【解析】设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则由 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)$，可得 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$；由题意，$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,2-\lambda)$，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 的夹角为 β，则由 β 为锐角，可

得 $\cos\beta=\dfrac{5-\lambda}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+5}}>0$，即 $5-\lambda>0$，所以 $\lambda<5$. 又当 $\lambda=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 同向，此时夹角为 0，不合题意，故 $\lambda\neq0$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角时，λ 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup(0,5)$.

易错警示 **对夹角的理解出现错误**

若两向量的夹角为钝角，则它们的数量积为负，反之不成立. 因为两向量反向共线时，夹角为平角，即 $180°$，其数量积也为负. 同理，若两向量的夹角为锐角，则它们的数量积为正，反之不成立. 因为两向量同向共线时，夹角为 $0°$，其数量积也为正.

规律总结 两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 满足 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，且 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，

若 $\cos\theta=1$，则 $\theta=0°$；若 $\cos\theta=0$，则 $\theta=90°$；若 $\cos\theta=-1$，则 $\theta=180°$；若 $\cos\theta<0$ 且 $\cos\theta\neq-1$，则 θ 为钝角；若 $\cos\theta>0$ 且 $\cos\theta\neq1$，则 θ 为锐角.

9. AB 【解析】对于 A，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{t^2+1}\geqslant1$，即 $|\boldsymbol{a}|$ 的最小值为 1，**故 A 正确**；

对于 B，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $t\times2+1\times t=0$，即 $t=0$，**故 B 正确**；

对于 C，若 $t=1$，则 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，则与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，**故 C 错误**；

对于 D，若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，即 $\begin{cases}2t+t<0,\\t^2\neq2,\end{cases}$ 即 $t<0$ 且 $t\neq-\sqrt{2}$，**故 D 错误.**

10. 【解】$\overrightarrow{OP}=(2\lambda,1-\lambda)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,1)$，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=-4\lambda+1-\lambda=0$，得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$，则 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\dfrac{4}{25}+\dfrac{16}{25}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

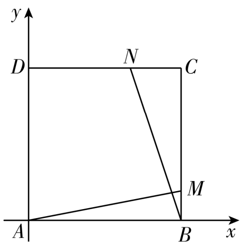
能力上分

1. C 【解析】因为 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,x)$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+x^2-2x=0$，所以 $x=1$. **故 C 正确.**

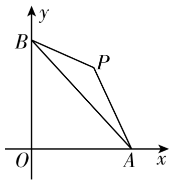
2. C

攻略上分 题目中给出了正方形，可以直接建立平面直角坐标系，将向量问题转化为坐标运算.

【解析】以 A 为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系，根据题意可得 $A(0,0)$，$B(6,0)$，$M(6,1)$，$N(4,6)$，$\therefore \overrightarrow{BN}=(-2,6)$，$\overrightarrow{AM}=(6,1)$，$\therefore \overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AM}=-2\times6+6\times1=-6$. **故 C 正确.**



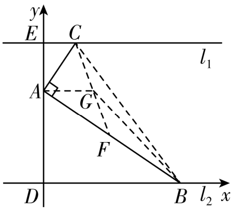
3. B 【解析】由题知，以 O 为原点，OA，OB 所在直线分别为 x，y 轴建立平面直角坐标系，如图所示.



设 $A(m,0)$，$B(0,n)$，且 $m>0$，$n>0$，则 $mn=8$，则 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=\dfrac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=(0,1)$，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,2)$，所以 $P(1,2)$，$\overrightarrow{PA}=(m-1,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(-1,-2+n)$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=5-(m+2n)\leqslant5-2\sqrt{2mn}=-3$，当且仅当 $m=2n$，即 $n=2$，$m=4$ 时取等号.

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为 -3，**故 B 正确.**

4. ABC 【解析】设 AB 的中点为 F，连接 CF，BC. 因为 $l_1/\!/l_2$，$ED\perp l_1$，所以 $ED\perp l_2$，以 D 为原点，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DE}$ 的方向分别为 x，y 轴的正方向，建立如图所示的平面直角坐标系.



则 $A(0,2)$，设 $C(m,3)$，$B(n,0)$，$G(x,y)$，$m,n,x,y\in\mathbf{R}$，且 $m,n\neq0$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(m,1)$，$\overrightarrow{AB}=(n,-2)$，

因为 $AC\perp AB$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

即 $mn-2=0$，故 $n=\dfrac{2}{m}$，即 $B\left(\dfrac{2}{m},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{GA}=(-x,2-y)$，$\overrightarrow{GB}=\left(\dfrac{2}{m}-x,-y\right)$，$\overrightarrow{GC}=(m-x,3-y)$.

因为 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，所以

$$\begin{cases}\dfrac{2}{m}+m-3x=0,\\5-3y=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x=\dfrac{2+m^2}{3m},\\y=\dfrac{5}{3},\end{cases}$$

因为 $\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\left(\dfrac{2+m^2}{3m},-\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{AG}=(x,y-2)=\left(\dfrac{2+m^2}{3m},-\dfrac{1}{3}\right)$，故 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，**故 A 正确.**

因为 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，所以 $\overrightarrow{GC}=-(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})$，即 $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GF}$，所以 G,C,F 三点共线，且 G 为 FC 上靠近 F 的三等分点，连接 GA，GB，所以 $S_{\triangle GAB}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{m^2}+4}=\dfrac{1}{3}\sqrt{(m^2+1)\left(\dfrac{1}{m^2}+1\right)}=\dfrac{1}{3}\sqrt{m^2+\dfrac{1}{m^2}+2}\geqslant\dfrac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{m^2\cdot\dfrac{1}{m^2}}+2}=\dfrac{2}{3}$，

当且仅当 $m^2=\dfrac{1}{m^2}$，即 $m=\pm1$ 时取等号，

故 B 正确.

因为 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\left(\dfrac{2+m^2}{3m},-\dfrac{1}{3}\right)$，

所以 $|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{\left(\dfrac{2+m^2}{3m}\right)^2+\dfrac{1}{9}}$

$=\sqrt{\dfrac{\dfrac{4}{m^2}+m^2+4}{9}+\dfrac{1}{9}}$

$\geqslant \sqrt{\dfrac{2\sqrt{\dfrac{4}{m^2}\cdot m^2}+4}{9}+\dfrac{1}{9}}=1$,

当且仅当$\dfrac{4}{m^2}=m^2$,即 $m=\pm\sqrt{2}$时取等号,

故$|\overrightarrow{AG}|\geqslant 1$,**故 C 正确.**

因为 $\overrightarrow{GA}=\left(-\dfrac{2+m^2}{3m},\dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{GB}=\left(\dfrac{-m^2+4}{3m},-\dfrac{5}{3}\right)$, 所以 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=-\dfrac{2+m^2}{3m}\cdot\dfrac{-m^2+4}{3m}-\dfrac{5}{9}=\dfrac{m^2-\dfrac{8}{m^2}-7}{9}$,

因为 $m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq 0$,所以 $m^2>0$,

设$f(x)=x-\dfrac{8}{x}-7,x>0$,由函数 $y=x$ 和 $y=-\dfrac{8}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增,

可知$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,没有最值,即 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$ 没有最值,**故 D 错误.**

故选 ABC.

5.【解】(1)由 $\boldsymbol{a}=(4,-2)$,可得$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$.

因为 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$,

所以 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=[x\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{a}^2+(1-x)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=20x-8(1-x)=0$,解得 $x=\dfrac{2}{7}$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,所以$\exists\lambda\in\mathbf{R}$,使 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$,即 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\lambda x\boldsymbol{a}+\lambda(1-x)\boldsymbol{b}$,

则$\begin{cases}\lambda x=1,\\ \lambda(1-x)=-2,\end{cases}$ 解得 $\lambda=x=-1$,故 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

由$|\boldsymbol{c}|^2=(-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=20-4\times(-8)+4\times 5=72$,可得$|\boldsymbol{c}|=6\sqrt{2}$.

又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{20+2\times(-8)+5}=3$,

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=-20-8+10=-18$,故 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{-18}{3\times 6\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

一题多解 (1)设 $\boldsymbol{b}=(m,n)$,依题意可得 $\begin{cases}m^2+n^2=5,\\4m-2n=-8,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=-1,\\n=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-\dfrac{11}{5},\\n=-\dfrac{2}{5}.\end{cases}$

①当 $\boldsymbol{b}=(-1,2)$ 时,$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{b}=x(4,-2)+(1-x)(-1,2)=(5x-1,2-4x)$,由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,可得 $4\times(5x-1)-2\times(2-4x)=0$,解得 $x=\dfrac{2}{7}$.

②当 $\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{11}{5},-\dfrac{2}{5}\right)$ 时,$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+(1-x)\cdot\boldsymbol{b}=x(4,-2)+(1-x)\left(-\dfrac{11}{5},-\dfrac{2}{5}\right)=\left(\dfrac{31}{5}x-\dfrac{11}{5},-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{2}{5}\right)$,由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,可得 $4\times\left(\dfrac{31}{5}x-\dfrac{11}{5}\right)-2\times\left(-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{2}{5}\right)=0$,解得 $x=\dfrac{2}{7}$. 综上,$x=\dfrac{2}{7}$.

(2)由(1)知,①当 $\boldsymbol{b}=(-1,2)$ 时,$\boldsymbol{c}=(5x-1,2-4x)$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(6,-6)$,因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,所以 $-6\times(5x-1)-6\times(2-4x)=0$,解得 $x=-1$,所以 $\boldsymbol{c}=(-6,6)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,0)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{-18}{3\times6\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

②当 $\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{11}{5},-\dfrac{2}{5}\right)$ 时,$\boldsymbol{c}=\left(\dfrac{31}{5}x-\dfrac{11}{5},-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{2}{5}\right)$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{42}{5},-\dfrac{6}{5}\right)$,因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,所以 $-\dfrac{6}{5}\times\left(\dfrac{31}{5}x-\dfrac{11}{5}\right)-\dfrac{42}{5}\times\left(-\dfrac{8}{5}x-\dfrac{2}{5}\right)=0$,解得 $x=-1$,所以 $\boldsymbol{c}=\left(-\dfrac{42}{5},\dfrac{6}{5}\right)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{9}{5},-\dfrac{12}{5}\right)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{-18}{3\times6\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

综上,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6.【解】(1) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{5}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\boldsymbol{b}+\frac{2}{5}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$.

因为 $CD\perp EF$,所以 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=\left(\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}\right)\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=0$,

所以 $\frac{2}{15}\boldsymbol{a}^2-\frac{3}{10}\boldsymbol{b}^2=0$,

由 $|\boldsymbol{b}|=2$ 得 $|\boldsymbol{a}|=3$,

所以 $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{4}{25}\boldsymbol{a}^2+\frac{12}{25}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{9}{25}\boldsymbol{b}^2}$

$=\sqrt{\frac{4}{25}\times9+\frac{12}{25}\times3\times2\times\frac{1}{2}+\frac{9}{25}\times4}$

$=\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

(2)以点 C 为坐标原点,CB 所在的直线为 x 轴建立平面直角坐标系,如图所示,连接 CM,DM,则 $C(0,0),B(3,0),A(1,\sqrt{3}),F(1,0),E\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),D\left(\frac{9}{5},\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$,

又 M 为线段 EF 上的任意一点,设点 $M(m,\sqrt{3}-\sqrt{3}m)$,且 $\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant1$,

则 $\overrightarrow{CM}=(m,\sqrt{3}-\sqrt{3}m)$,$\overrightarrow{MD}=\left(\frac{9}{5}-m,\sqrt{3}m-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$,

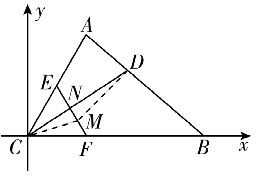
所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MD}=(m,\sqrt{3}-\sqrt{3}m)\cdot\left(\frac{9}{5}-m,\sqrt{3}m-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)=-4m^2+6m-\frac{6}{5}$,

所以当 $m=\frac{3}{4}$ 时,$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MD}$ 取得最大值,

最大值为 $-4\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+6\times\frac{3}{4}-\frac{6}{5}=\frac{21}{20}$,

当 $m=1$ 或 $m=\frac{1}{2}$ 时,$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MD}$ 取得最小值,最小值为 $-4\times1^2+6\times1-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$,

所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MD}$ 的取值范围为 $\left[\frac{4}{5},\frac{21}{20}\right]$.



§5 节测上分

1. D 【解析】由 $|a+b|=|a-b|$,两边平方得 $a^2+b^2+2a\cdot b=a^2+b^2-2a\cdot b$,则 $a\cdot b=0$,因此 $(a-2b)\cdot b=-2b^2$,所以 $a-2b$ 在 b 方向上的投影向量为 $\frac{(a-2b)\cdot b}{|b|}\cdot\frac{b}{|b|}=-2b$,故 D 正确.

2. D 【解析】因为 a,b 均为单位向量,所以 $|a|=|b|=1$.

又 b 在 a 方向上的投影向量为 $\frac{a\cdot b}{|a|^2}\cdot a=-\frac{1}{2}a$,所以 $a\cdot b=-\frac{1}{2}$,所以 $|a-2b|=\sqrt{(a-2b)^2}=\sqrt{a^2-4a\cdot b+4b^2}=\sqrt{1^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times1^2}=\sqrt{7}$. 故 D 正确.

3. A 【解析】因为 $a\perp b$,所以 $-1\times\lambda+2=0$,解得 $\lambda=2$,所以 $b=(2,1)$,所以 $3a+b=(-1,7)$,$a-2b=(-5,0)$,所以 $\cos\langle 3a+b,a-2b\rangle=\frac{(3a+b)\cdot(a-2b)}{|3a+b||a-2b|}=\frac{5}{\sqrt{1+49}\times5}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$. 故 A 正确.

4. D 【解析】当 $a+b$ 与 $ta-b$ 反向共线时,$t=-1$. ∵ $a+b$ 与 $ta-b$ 的夹角为钝角,∴ $(a+b)\cdot(ta-b)<0$ 且 $t\neq-1$,∴ $ta^2-a\cdot b+ta\cdot b-b^2=t-1+(t-1)a\cdot b=t-1+(t-1)\times1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}(t-1)<0$,解得 $t<1$,且 $t\neq-1$,故 D 正确.

5. B 【解析】由 $A(0,4\sqrt{3})$,$C(4,0)$ 知,直线 AC 为 $y=-\sqrt{3}(x-4)$. 不妨设 $P(x,-\sqrt{3}(x-4))$,其中 $x\in(0,4)$,则 $\overrightarrow{BP}=(x+4,-\sqrt{3}(x-4))$,$\overrightarrow{OP}=(x,-\sqrt{3}(x-4))$. 因为 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OP}=32$,所以 $x(x+4)+3(x-4)^2=32$,整理得 $x^2-5x+4=0$,解得 $x=1$ 或 $x=4$(舍),所以 $\overrightarrow{OP}=(1,3\sqrt{3})$,所以 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{1+27}=2\sqrt{7}$. 故 B 正确.

6. 22 【解析】因为在直角梯形 $ABCD$ 中,

已知 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，$AB=5$，$AD=3$，$CD=2$，所以 $\overrightarrow{DC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. 因为四边形 $ABCD$ 是直角梯形，所以 $AB\perp AD$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，所以 $(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)=\left[\overrightarrow{AD}+\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\right]\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{15}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)=\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{4}{3}|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{8}{15}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{4}{3}\times9+\frac{2}{5}\times25=12+10=22.$

7. -12　$\frac{1}{4}$　【解析】因为 $\triangle BCD$ 为等边三角形，$BC=6$，所以 $CD=BD=6$，$\angle CDB=60°$.

因为 $\triangle ABD$ 为等腰三角形，$AB=AD$，$\angle ABD=30°$，所以 $\angle ADB=30°$，

所以 $\angle CDA=90°$，即 $DC\perp DA$.

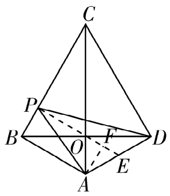
设 BD 的中点为 O，则 $OA\perp BD$，$OC\perp BD$，因为 $BD=6$，所以 $OB=OD=3$，又 $\angle ABD=30°$，所以 $AO=\sqrt{3}$，$AB=AD=2\sqrt{3}$，故 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AD}^2=-12.$

设线段 AD 的中点为 E，连接 PE，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{PE}-\overrightarrow{EA})=\overrightarrow{PE}^2-3$，因此，当 $|\overrightarrow{PE}|$ 最小时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 取得最小值.

此时 PE 为线段 BC 的垂线，垂足为 P，

过点 A 作 $AF\perp PE$ 交 PE 于点 F，如图①所示，则四边形 $ABPF$ 为矩形，易知 $\angle EAF=30°$，$AE=\sqrt{3}$，所以 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AF=\frac{3}{2}$，所以

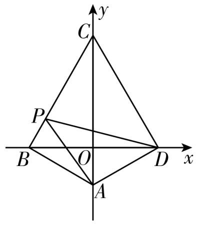
$|\overrightarrow{BP}|=\dfrac{3}{2}$，$\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{BP}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{1}{4}$.



图①

一题多解 因为△BCD为等边三角形，$BC=6$，所以$CD=BD=6$，$\angle CDB=60°$，因为△ABD为等腰三角形，$AB=AD$，$\angle ABD=30°$，取BD的中点为O，所以$OA\perp BD$，$OC\perp BD$，因为$BD=6$，所以$OB=OD=3$，又$\angle ABD=30°$，所以$AO=\sqrt{3}$，$AB=AD=2\sqrt{3}$，以BD，AC所在直线分别为x，y轴建立平面直角坐标系，如图②，则$C(0,3\sqrt{3})$，$D(3,0)$，$A(0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CA}=(0,-4\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(3,\sqrt{3})$，故$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}=-12$.

而$B(-3,0)$，则$\overrightarrow{BC}=(3,3\sqrt{3})$，则$\overrightarrow{BP}=(3\lambda,3\sqrt{3}\lambda)$，所以点$P$的坐标为$(3\lambda-3,3\sqrt{3}\lambda)$，故$\overrightarrow{PA}=(3-3\lambda,-\sqrt{3}-3\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{PD}=(6-3\lambda,-3\sqrt{3}\lambda)$，故$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=36\lambda^2-18\lambda+18$，可知当$\lambda=\dfrac{1}{4}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$取得最小值.



图②

8.【解】(1)由题意知，$\overrightarrow{AB}=(3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2)$. 因为$(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\perp(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC})$，所以$(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}^2-t^2\overrightarrow{AC}^2=0$，即$25-5t^2=0$，解得$t=\pm\sqrt{5}$.

(2)由(1)知$\overrightarrow{AB}=(3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2)$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5$，则$\boldsymbol{a}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AC}=(-1,2)$.

9.【解】(1)当 $\lambda=\frac{1}{2}$时,E 为 CD 的中点,可得 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

若 $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,则 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=(x-1)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$. 因为 F 是 AD 的中点,所以 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,结合 $\overrightarrow{BN}/\!/\overrightarrow{BF}$,

得$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{\frac{1}{2}}$ ①.

由 $\overrightarrow{AN}/\!/\overrightarrow{AE}$,得$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{1}$ ②. 由①②,解得

$x=\frac{1}{5},y=\frac{2}{5}$,所以 $x-y=-\frac{1}{5}$.

(2)根据题意,可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\frac{\pi}{3}=12$.

由 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{AB}$,得 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,则 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=(\lambda-1)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. 由 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,得 $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FE}=[(\lambda-1)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}]\cdot\left(\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=(\lambda^2-\lambda)|\overrightarrow{AB}|^2+\left(\frac{3\lambda}{2}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2=16(\lambda^2-\lambda)+12\left(\frac{3\lambda}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times6^2=16\lambda^2+2\lambda+12$,根据二次函数的性质,当 $\lambda=-\frac{1}{16}$时,$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FE}$ 取得最小值为 $16\times\left(-\frac{1}{16}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{16}\right)+12=\frac{191}{16}$.

所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FE}$ 的最小值为$\frac{191}{16}$.

专题上分 3 平面向量问题的求解

1. A 【解析】依题意有 $\overrightarrow{EC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\times\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$,所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,所以 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，所以 $\lambda=\frac{3}{4}$，$\mu=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{8}$. 故 A 正确.

2. **思路导引** (1)根据平面向量基本定理得到 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，结合 $\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，从而得到 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$；(2)①由题知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24$，由(1)知 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，然后根据数量积的运算性质结合条件计算即可；②由 $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，利用向量数量积及运算律计算出 $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BG}=4$ 和 $|\overrightarrow{BG}|=\sqrt{13}$，再利用向量夹角余弦公式进行计算即可.

【解】(1)在四边形 $FDBG$ 中，$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BG}$.

在四边形 $FECG$ 中，$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CG}$.

又因为 F,G 分别是 DE,BC 的中点，所以 $\overrightarrow{FD}=-\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{BG}=-\overrightarrow{CG}$.

所以 $2\overrightarrow{FG}=(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BG})+(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CG})=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}$，即 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，

又因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$，所以 $\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 所以 $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

(2)①由题知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times8\times\cos 60°=24$.

又由(1)知，$\overrightarrow{FG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

因此 $|\overrightarrow{FG}|^2=\frac{1}{36}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2+\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{36}\times6^2+\frac{1}{16}\times8^2+\frac{1}{12}\times24=7$.

所以 $|\overrightarrow{FG}|=\sqrt{7}$.

②因为 $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

所以 $|\overrightarrow{BG}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2}=$

$\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=$

$\frac{1}{2}\sqrt{8^2+6^2-2\times 24}=\sqrt{13}$.

$\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BG}=\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

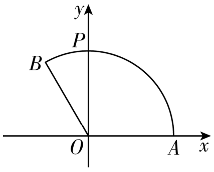
$=\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{24}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{8}\times 8^2-\frac{1}{12}\times 6^2-\frac{1}{24}\times 24=4$,

所以 $\cos\angle BGF=\frac{\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{FG}||\overrightarrow{BG}|}=$

$\frac{4}{\sqrt{7}\times\sqrt{13}}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$.

3. B 【解析】如图，以 O 为坐标原点，OA，OP 所在直线分别为 x 轴、y 轴，



建立平面直角坐标系，易得 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$P(0,1)$. 又扇形 AOB 的半径为 1，$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，所以 $B\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，

即 $B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{OP}=(0,1)$，$\overrightarrow{OB}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 由 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$ 得 $(0,1)=\left(a-\frac{1}{2}b,\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$，所以

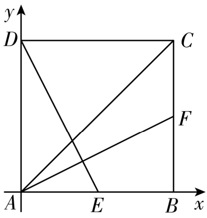
$\begin{cases}a-\frac{1}{2}b=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}b=1,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{3},\\ b=\frac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 所以 $a+b=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$. 故 B 正确.

4. **思路导引** (1)建立平面直角坐标系，写出相关点的坐标，利用向量垂直的坐标表示推理得证. (2)利用向量线性运算的坐标表示，结合相等向量列式求解. (3)按点 P 的不同位置设出其坐标，利用数量积的坐标表示列式求出范围.

(1)【证明】以 A 为坐标原点，直线 AB，

AD 分别为 x,y 轴，建立平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(a,a)$，$D(0,a)$，$E\left(\frac{a}{2},0\right)$，$F\left(a,\frac{a}{2}\right)$，$a>0$，

$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{a}{2},-a\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(a,\frac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{a}{2}\cdot a-a\cdot\frac{a}{2}=0$，所以 $AF\perp DE$.



(2)【解】由(1)知 $\overrightarrow{AC}=(a,a)$，$x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{DE}=\left(ax+\frac{a}{2}y,\frac{a}{2}x-ay\right)$，

由 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{DE}$，得 $\begin{cases}ax+\frac{a}{2}y=a,\\ \frac{a}{2}x-ay=a,\end{cases}$ 解得

$x=\frac{6}{5}$，$y=-\frac{2}{5}$，所以 $x+y=\frac{4}{5}$.

(3)【解】由(1)知 $\overrightarrow{AB}=(a,0)$，

当 P 在线段 AD 上时，设 $P(0,t)$，$0\leqslant t\leqslant a$，$\overrightarrow{EP}=\left(-\frac{a}{2},t\right)$，$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}a^2$；

当 P 在线段 DC 上时，设 $P(s,a)$，$0\leqslant s\leqslant a$，$\overrightarrow{EP}=\left(s-\frac{a}{2},a\right)$，$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AB}=a\left(s-\frac{a}{2}\right)\in\left[-\frac{1}{2}a^2,\frac{1}{2}a^2\right]$；

当 P 在线段 BC 上时，设 $P(a,b)$，$0\leqslant b\leqslant a$，$\overrightarrow{EP}=\left(\frac{a}{2},b\right)$，$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}a^2$；

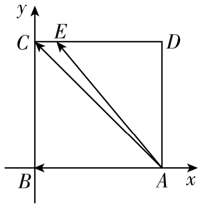
当 P 在线段 AB 上时，设 $P(c,0)$，$0\leqslant c\leqslant a$，$c\neq\frac{1}{2}a$，$\overrightarrow{EP}=\left(c-\frac{a}{2},0\right)$，$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AB}=a\left(c-\frac{a}{2}\right)\in\left[-\frac{1}{2}a^2,0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}a^2\right]$.

所以 $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}a^2,\frac{1}{2}a^2\right]$.

5. B

攻略上分 除常规解法外，本题也可利用等和线将代数问题转化为图形问题，确定对应 k 值的等和线后，结合动点的位置，分析向量系数和的取值范围.

【解析】如图，以 B 为坐标原点，AB，BC 所在直线分别为 x 轴，y 轴，建立平面直角坐标系，

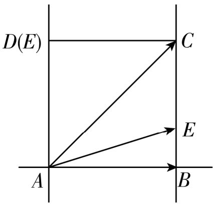


设 $AB=1$，则 $B(0,0)$，$A(1,0)$，$C(0,1)$，$D(1,1)$，当点 E 在 BC 上时，设 $E(0,m)$，$m\in[0,1]$，则 $(-1,m)=\lambda(-1,0)+\mu(-1,1)$，即 $\begin{cases}-\lambda-\mu=-1,\\ m=\mu,\end{cases}$ 故 $\lambda+\mu=1$.

当点 E 在 CD 上时，设 $E(t,1)$，$t\in[0,1]$，则 $(t-1,1)=\lambda(-1,0)+\mu(-1,1)$，即 $\begin{cases}-\lambda-\mu=t-1,\\ \mu=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-t,\\ \mu=1,\end{cases}$ 故 $\lambda+\mu=1-t\in[0,1]$.

当点 E 在 AD 上时，设 $E(1,u)$，$u\in[0,1]$，则 $(0,u)=\lambda(-1,0)+\mu(-1,1)$，即 $\begin{cases}-\lambda-\mu=0,\\ \mu=u,\end{cases}$ 故 $\lambda+\mu=0$，综上，$\lambda+\mu$ 的取值范围是 $[0,1]$. **故 B 正确.**

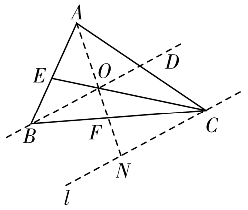
一题多解 如图所示，当点 E 在 BC 上运动时，由 B，C，E 三点共线可得 $\lambda+\mu=1$，当点 E 与 D 点重合时，因为 $AD/\!/BC$，此时 $\lambda+\mu=0$，所以根据等和线定理的结论可以快速得到 $\lambda+\mu$ 的取值范围是 $[0,1]$. **故 B 正确.**



6. B 【解析】因为 O 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，所以 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，又 M 在 $\triangle OBC$ 内（不含边界），且当 M 与 O 重合时，$\lambda+2\mu$ 最小，此时 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right]=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$，即 $\lambda+2\mu=1$. 当 M 与 C 重合时，$\lambda+2\mu$ 最大，此时 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=0$，$\mu=1$，即 $\lambda+2\mu=2$. 因为 M 在

$\triangle OBC$ 内且不含边界，所以取开区间，即 $\lambda+2\mu\in(1,2)$. **故 B 正确.**

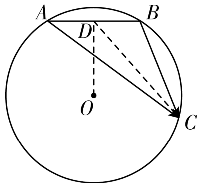
一题多解 取 AC 的中点 D，连接 BD 并延长. 因为 O 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，所以 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，又 M 在 $\triangle OBC$ 内（不含边界），$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{AD}$，如图所示，过点 C 作 BD 的平行线 l，连接 AO 并延长交 BC 于点 F，交直线 l 于点 N，因为当点 M 在点 O 处时，$\lambda+2\mu=1$；当点 M 在点 C 处时，根据等和线定理，因为 $AO:AN=1:2$，所以 $\lambda+2\mu=2$，因为 M 在 $\triangle OBC$ 内且不含边界，所以取开区间，即 $\lambda+2\mu\in(1,2)$.



7. C 【解析】取 AB 的中点 D，连接 CD，OD，如图所示. 所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}^2=-1+0+\overrightarrow{DC}^2=\overrightarrow{DC}^2-1$（常规推导），

提示：也可以直接由极化恒等式得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}^2-1$

因为 $OD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，所以 $CD_{\min}=2-\sqrt{3}$，$CD_{\max}=2+\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最小值为 $(2-\sqrt{3})^2-1=6-4\sqrt{3}$，最大值为 $(2+\sqrt{3})^2-1=6+4\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是 $[6-4\sqrt{3},6+4\sqrt{3}]$. **故 C 正确.**



8. D

攻略上分 本题所求的两向量 $\overrightarrow{ME}$，$\overrightarrow{MF}$ 共起点，且易知 D 为 EF 的中点，故可利用极化恒等式求解.

【解析】连接 MD（图略）. 由题意可得 $BC=2$，D 为线段 EF 的中点，由极化恒等

式得 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{FE}^2$，又 $MD=\frac{1}{2}BC=1$，$EF=AC=2\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=1-\frac{1}{4}\times 8=-1$. **故 D 正确.**

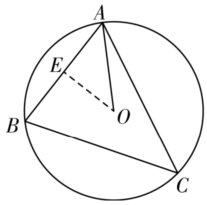
一题多解 连接 MD（图略）. 由 D 为线段 EF 的中点，得 $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{MD}$，则 $(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF})^2=\overrightarrow{ME}^2+2\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MF}^2=4\overrightarrow{MD}^2$ ①，$\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{FE}$，$(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MF})^2=\overrightarrow{FE}^2$ ②，由 ①－② 可得 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{FE}^2=1-\frac{1}{4}\times 8=-1$.

9. A

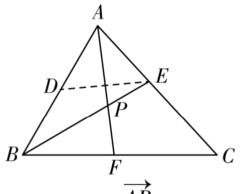
攻略上分 本题为三角形的外心问题，可利用数量积定义求解，也可用通法攻略 21 中的结论直接求解.

【解析】如图，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E，因为 $OE\perp AB$，所以 $|\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle BAO=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}\times 4^2=8$. **故 A 正确.**

提示：可由投影向量的定义　或者 $\cos\angle BAO=\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AO}|}$ 得到



10. D 【解析】如图，设 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ 分别为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量，连接 DE，则 $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，由已知可得 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，所以 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{DE}$，所以 $AP\perp DE$，又 $AD=AE$，所以 AP 为 $\angle BAC$ 的平分线. 同理，BP 为 $\angle ABC$ 的平分线，则



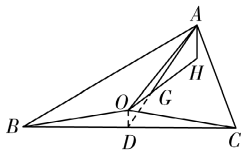
点 P 是△ABC 的内心. **故 D 正确.**

11. BCD 【解析】如图,由题意,O,H,G 分别是△ABC 的外心、垂心和重心,延长 AG 交 BC 于点 D,则 D 是 BC 的中点,连接 OD,所以 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$,故 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}$,当 $AB\neq AC$ 时,A,O,D 不共线,则 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}\neq\mathbf{0}$,此时 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 不成立,**故 A 错误;**

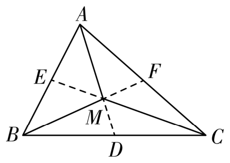
由欧拉线定理可知 $\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}$,则 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$,$\overrightarrow{HG}=-2\overrightarrow{OG}$,从而 $2\overrightarrow{OH}+3\overrightarrow{HG}=6\overrightarrow{OG}-6\overrightarrow{OG}=\mathbf{0}$,**故 B 正确;**

因为 H 是△ABC 的垂心,所以 $AH\perp BC$,所以 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,即 $\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$,**故 C 正确;**

由 $\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}$,可得 $\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AG}=2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OA})$,即 $\overrightarrow{AH}=3\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{OA}$,**故 D 正确.**



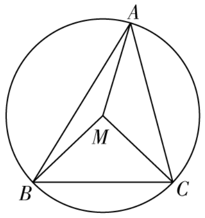
12. ABD 【解析】对于 A,因为 $S_A:S_B:S_C=1:1:1$,所以 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,如图①,取 BC 的中点 D,连接 MD,则 $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$,所以 $2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MA}$,而 MD 与 MA 有公共点 M,故 A,M,D 三点共线,且 $MA=2MD$,同理,取 AB 的中点 E,AC 的中点 F,可得 B,M,F 三点共线,C,M,E 三点共线,且 $CM=2ME$,$BM=2MF$,所以 M 为△ABC 的重心,**故 A 正确.**



图①

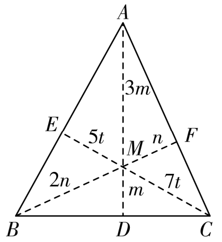
对于 B,若 M 为△ABC 的内心,可设其内切圆半径为 r,则 $S_A=\frac{1}{2}BC\cdot r$,$S_B=\frac{1}{2}AC\cdot r$,$S_C=\frac{1}{2}AB\cdot r$,所以 $\frac{1}{2}BC\cdot r\cdot\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}AC\cdot r\cdot\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}AB\cdot r\cdot\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,即 $BC\cdot\overrightarrow{MA}+AC\cdot\overrightarrow{MB}+AB\cdot\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,**故 B 正确.**

对于 C，若 $\angle BAC=45°$，$\angle ABC=60°$，M 为 $\triangle ABC$ 的外心，则 $\angle ACB=75°$，如图②，设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，故 $\angle BMC=2\angle BAC=90°$，$\angle AMC=2\angle ABC=120°$，$\angle AMB=2\angle ACB=150°$，故 $S_A=\dfrac{1}{2}R^2$，$S_B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}R^2$，$S_C=\dfrac{1}{4}R^2$，所以 $S_A:S_B:S_C=2:\sqrt{3}:1$，**故 C 错误.**



图②

对于 D，若 M 为 $\triangle ABC$ 的垂心，$3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，则 $S_A:S_B:S_C=3:4:5$，如图③，分别过 A,C,B 作 $AD\perp BC$，$CE\perp AB$，$BF\perp AC$，垂足分别为 D,E,F，AD,CE,BF 相交于点 M，



图③

又 $S_{\triangle ABC}=S_A+S_B+S_C$，$\dfrac{S_A}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$，即 $AM:MD=3:1$，$\dfrac{S_B}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$，即 $MF:BM=1:2$，$\dfrac{S_C}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{5}{12}$，即 $ME:MC=5:7$，设 $MD=m$，$MF=n$，$ME=5t$，则 $AM=3m$，$BM=2n$，$MC=7t$，因为 $\angle CAD=\angle CBF$，$\sin\angle CAD=\dfrac{n}{3m}$，$\sin\angle CBF=\dfrac{m}{2n}$，所以 $\dfrac{n}{3m}=\dfrac{m}{2n}$，即 $m=\dfrac{\sqrt{6}}{3}n$，$\cos\angle BMD=\dfrac{m}{2n}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3}n}{2n}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

则 $\cos\angle AMB=\cos(\pi-\angle BMD)=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

故 D 正确.

专题上分 4　向量最值（取值范围）问题

1. C

攻略上分　数量积的最值问题，可用通法攻略 18.

【解析】由题意得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1\times\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，则 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

因为 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle\geqslant-|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$，

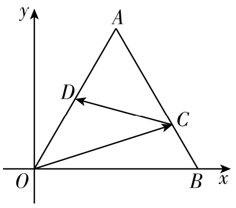
提示：$-1\leqslant\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle\leqslant1$

当且仅当 $\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\rangle=\pi$ 时取等号，

又 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=1+4\times\frac{1}{2}+4=7$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，

所以 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})\leqslant2+\sqrt{7}$. **故选 C.**

2. A　【解析】如图.



设 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{BA}=(1,0)+\lambda\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(1-\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)$，

又 $\overrightarrow{OD}=\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，

所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(1-\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)=\left(-\frac{3}{4}+\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(1-\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}+\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right)=-\lambda^2+\frac{5}{4}\lambda-\frac{3}{4}=-\left(\lambda-\frac{5}{8}\right)^2-\frac{23}{64}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$.

所以当 $\lambda=0$ 时，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD}$ 取得最小值，为 $-\frac{3}{4}$；当 $\lambda=\frac{5}{8}$ 时，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD}$ 取得最大

值，为 $-\dfrac{23}{64}$.

所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CD}\in\left[-\dfrac{3}{4},-\dfrac{23}{64}\right]$. **故选 A.**

3. D

思路导引 由题意可知，$AB=AC$，取 BC 的中点 E，连接 AE,DE，则 $AE\perp BC$，$BC=2\sqrt{2}$，$AE=3\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{2}$，由极化恒等式得到 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DE}^2-2$，求出 DE 的最小值，得到答案.

【解析】因为 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别表示 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量，

所以 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 表示 $\angle BAC$ 的平分线上的向量，

又 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 垂直，

由三线合一可知，$AB=AC$.

如图，取 BC 的中点 E，连接 AE,DE，则 $AE\perp BC$，

又 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=6\sqrt{2}$，其中 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$，

所以 $BC=2\sqrt{2}$，$AE=3\sqrt{2}$，故 $BE=\sqrt{2}$，

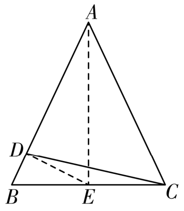
由于 $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EB}$，由极化恒等式可得 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DE}^2-\overrightarrow{EB}^2=\overrightarrow{DE}^2-2$，

当 $ED\perp AB$ 时，ED 取得最小值，

由勾股定理得 $AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{18+2}=2\sqrt{5}$，

故 $DE=\dfrac{AE\cdot BE}{AB}=\dfrac{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，

故 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最小值为 $\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2-2=-\dfrac{1}{5}$.



4. D **【解析】**设 $\boldsymbol{y}=(m,n)$.

因为 $\boldsymbol{x}=(2,0)$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=2$，所以 $2m=2$，解得 $m=1$，

则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}=(2,0)+(1,n)-(0,1)=(3,n-1)$，则 $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|=\sqrt{9+(n-1)^2}$，

当 $n=1$ 时，$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|$ 取得最小值 3. **故选 D.**

5. D 【解析】由题可知 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{e}|\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|$.

由 $|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}|$，两边同时平方得 $|\boldsymbol{b}|^2+t^2|\boldsymbol{e}|^2-2t\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}\geqslant|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{e}|^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}$，化简整理得 $t^2-|\boldsymbol{b}|t-(1-|\boldsymbol{b}|)\geqslant 0$.

因为 $|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}|$ 对任意实数 t 恒成立，所以 $t^2-|\boldsymbol{b}|t-(1-|\boldsymbol{b}|)\geqslant 0$ 对任意实数 t 恒成立，

所以 $\Delta=|\boldsymbol{b}|^2+4(1-|\boldsymbol{b}|)=(|\boldsymbol{b}|-2)^2\leqslant 0$，所以 $|\boldsymbol{b}|=2$.

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}|=\sqrt{|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}|^2}=\sqrt{|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{e}|^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}}=\sqrt{4+1+2}=\sqrt{7}$，

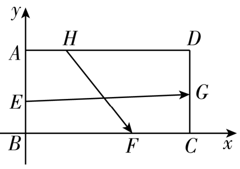
当且仅当向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 方向相反时等号成立，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值为 $\sqrt{7}$. **故选 D.**

6. $\frac{8}{17}$

思路导引 建立平面直角坐标系 Bxy，设 $E(0,e)$，$F(f,0)$，$G(4,g)$，$H(h,2)$，$e,g\in[0,2]$，$f,h\in[0,4]$，令 $\alpha=g-e\in[-2,2]$，$\beta=f-h\in[-4,4]$，则 $\overrightarrow{EG}=(4,\alpha)$，$\overrightarrow{HF}=(\beta,-2)$，应用向量夹角的坐标表示求最大值.

【解析】建立平面直角坐标系 Bxy，如图.

设 $E(0,e)$，$F(f,0)$，$G(4,g)$，$H(h,2)$，$e,g\in[0,2]$，$f,h\in[0,4]$，



所以 $\overrightarrow{EG}=(4,g-e)$，$\overrightarrow{HF}=(f-h,-2)$，

$-2\leqslant g-e\leqslant 2$，$-4\leqslant f-h\leqslant 4$，

令 $\alpha=g-e\in[-2,2]$，$\beta=f-h\in[-4,4]$，

则 $\overrightarrow{EG}=(4,\alpha)$，$\overrightarrow{HF}=(\beta,-2)$，

所以 $|\overrightarrow{EG}|=\sqrt{16+\alpha^2}$，$|\overrightarrow{HF}|=\sqrt{\beta^2+4}$，且

$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{HF}=4\beta-2\alpha=4$，即 $\alpha=2\beta-2$，

所以 $-2\leqslant 2\beta-2\leqslant 2$，故 $\beta\in[0,2]$.

由题设 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{HF}}{|\overrightarrow{EG}||\overrightarrow{HF}|}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{\alpha^2+16}\times\sqrt{\beta^2+4}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{(\alpha\beta)^2+4\alpha^2+16\beta^2+64}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{(\alpha\beta)^2+4(2\beta-\alpha)^2+16\alpha\beta+64}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{(\alpha\beta)^2+16\alpha\beta+80}}=\dfrac{4}{\sqrt{(\alpha\beta+8)^2+16}}$，

又 $\alpha\beta=2\beta(\beta-1)=2\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\in\left[-\dfrac{1}{2},4\right]$，所以当 $\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\cos\theta$ 取最大值 $\dfrac{4}{\sqrt{\dfrac{1}{4}-8+80}}=\dfrac{8}{17}$.

7. D 【解析】由点 D 在线段 BC 上，$|\overrightarrow{BD}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{DC}|$，得 $\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}+4y\overrightarrow{BD}$，

而 E 为线段 AD 上除端点外的任意一点，

则 $x+4y=1$，且 $x>0,y>0$，

所以 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)(x+4y)=5+\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqslant 5+2\sqrt{\dfrac{4y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}=9$，当且仅当 $\dfrac{4y}{x}=\dfrac{x}{y}$，即 $x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{1}{6}$ 时取等号，所以 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值为 9. **故选 D.**

8. C

思路导引 利用平面向量基本定理推导出 $m+2n=6$，即 $\dfrac{m}{2}+\left(\dfrac{m}{2}+2n\right)=6$，将代数式 $\dfrac{2}{m}+\dfrac{9}{\dfrac{m}{2}+2n}$ 与 $\dfrac{1}{6}\left[\dfrac{m}{2}+\left(\dfrac{m}{2}+2n\right)\right]$ 相乘，展开后利用基本不等式可求得 $\dfrac{2}{m}+\dfrac{9}{\dfrac{m}{2}+2n}$ 的最小值.

【解析】因为 $\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{OC}$，则 $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO})$，所以 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

因为 G 为 AO 的中点，所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

因为 D,G,E 三点共线，设 $\overrightarrow{DG}=\lambda\overrightarrow{DE}(\lambda>0)$，则 $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\lambda(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$，

所以 $\overrightarrow{AG}=(1-\lambda)\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AE}$，

因为 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AD}(m>0)$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AE}(n>0)$，

所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{m}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{n}\overrightarrow{AC}$，

则 $\overrightarrow{AG}=\frac{1-\lambda}{m}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{n}\overrightarrow{AC}$.

因为 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线，

所以 $\begin{cases}\frac{1-\lambda}{m}=\frac{1}{6},\\ \frac{\lambda}{n}=\frac{1}{3},\end{cases}$

提示：平面内的向量可以用同一组基唯一表示

所以 $\frac{m}{6}+\frac{n}{3}=(1-\lambda)+\lambda=1$，

所以 $m+2n=6$，即 $\frac{m}{2}+\left(\frac{m}{2}+2n\right)=6$，

所以 $\frac{2}{m}+\frac{9}{\frac{m}{2}+2n}=\frac{1}{\frac{m}{2}}+\frac{9}{\frac{m}{2}+2n}$

$=\frac{1}{6}\left[\frac{m}{2}+\left(\frac{m}{2}+2n\right)\right]\left(\frac{1}{\frac{m}{2}}+\frac{9}{\frac{m}{2}+2n}\right)$

$=\frac{1}{6}\left(10+\frac{\frac{m}{2}+2n}{\frac{m}{2}}+\frac{\frac{9m}{2}}{\frac{m}{2}+2n}\right)$

$\geqslant\frac{1}{6}\left(10+2\sqrt{\frac{\frac{m}{2}+2n}{\frac{m}{2}}\cdot\frac{\frac{9m}{2}}{\frac{m}{2}+2n}}\right)=\frac{8}{3}$，

当且仅当 $\begin{cases}\frac{\frac{m}{2}+2n}{\frac{m}{2}}=\frac{\frac{9m}{2}}{\frac{m}{2}+2n},\\ \frac{m}{2}+\left(\frac{m}{2}+2n\right)=6,\\ m>0,n>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m=3,\\ n=\frac{3}{2}\end{cases}$ 时，等号成立，

所以 $\frac{2}{m}+\frac{9}{\frac{m}{2}+2n}$ 的最小值为 $\frac{8}{3}$. **故选 C.**

§6　平面向量的应用

6.1　余弦定理与正弦定理

课时1　余弦定理

对点上分

1. A　【解析】∵ $a^2+b^2-c^2=kab$，∴ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{kab}{2ab}=\frac{k}{2}$. ∵ $0<C<\pi$，∴ $-1<\cos C<1$，解得 $-2<k<2$，∴ 实数 k 的取值范围是 $(-2,2)$. **故 A 正确.**

2. C　【解析】因为 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，所以 $C=60°$.

又因为 $2\sin C=\sqrt{6}\cos B$，所以 $2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}\cos B$，$\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $B=45°$，所以 $A=180°-60°-45°=75°$. **故 C 正确.**

规律总结　在解三角形问题中，遇到 $a^2+b^2-c^2=kab$ 型的式子（其中 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边，$k\in\mathbf{R}$），首先想到余弦定理的变形 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{kab}{2ab}=\frac{k}{2}$，尤其当 $k=\pm1,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}$ 时，C 是特殊角，要在做完此题后有明确的认知并牢记规律.

3. $\frac{\pi}{3}$

攻略上分　由本题题干可以看出等式右边部分可直接利用射影定理变形，进而化简求解即可.

【解析】∵ $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，∴ 由射影定理得 $2b\cos B=b$，∴ $\cos B=\frac{1}{2}$，∵ $0<B<\pi$，∴ $B=\frac{\pi}{3}$.

4. C

攻略上分　本题为已知两边及其中一边的对角解三角形，符合通法攻略 23 中的类型.

【解析】∵ $a=3$，$b=\sqrt{7}$，$B=60°$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，∴ $7=9+c^2-2\times3\times c\times$

$\frac{1}{2}$，则 $c^2-3c+2=0$，解得 $c=1$ 或 $c=2$，经检验，均符合题意. **故 C 正确.**

5. A 【解析】因为 $a=2,b=3,\cos(A+B)=\frac{1}{3}=\cos(\pi-C)=-\cos C$，

所以 $\cos C=-\frac{1}{3}$，

则由余弦定理可得 $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=\sqrt{17}$.

故 A 正确.

规律总结 已知两边及一角解三角形的策略

（1）若已知两边和两边夹角，则直接应用余弦定理求出第三边，然后根据边角关系应用余弦定理求解其他角；

（2）若已知两边和一边的对角，则利用余弦定理列出关于第三边的方程，再运用解方程的方法求出第三边的长，最后根据余弦定理求解其他角.

6. B 【解析】因为 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，$BD\perp BC$，所以 $\angle ABD=\frac{\pi}{6}$，在 $\triangle ABD$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$BD=1$，由余弦定理得到 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\angle ABD$，所以 $AD^2=3+1-2\times1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$，即 $AD=1$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$，得到 $a=c=\sqrt{3}$，**故 B 正确.**

7. C 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a=5,b=4,c=\sqrt{21}$，则可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+4^2-(\sqrt{21})^2}{2\times5\times4}=\frac{1}{2}$，由 $0°<C<180°$，可得 $C=60°$. **故 C 正确.**

规律方法 已知三边求解三角形的方法

若已知三角形的三边，可利用余弦定理求解出各角的大小. 注意：在已知三边求三个角时，一般先求大角后求小角.

8. D　【解析】因为 $a:b:c=2:3:4$，所以可设 $a=2m,b=3m,c=4m,m>0$，利用余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(2m)^2+(4m)^2-(3m)^2}{2\times2m\times4m}=\frac{11}{16}$. 故 D 正确.

9. A　【解析】由 $a=c-1,b=c+1$，得 $b>c>a>0$. 又因为△ABC 为钝角三角形，所以 $\cos B<0$，即 $\frac{c^2+(c-1)^2-(c+1)^2}{2c(c-1)}<0$，所以 $c^2-4c<0$，故 $0<c<4$. 由三角形的两边之和大于第三边，得 $c+c-1>c+1$，故 $c>2$. 故 c 的取值范围为 $(2,4)$. **故 A 正确.**

易错警示　忽略三角形的三边关系致错

由于余弦定理及其推论的变形较多，且涉及平方和、开方等运算，所以可能会因不细心而导致错误. 在利用余弦定理求出三角形的三边后，还要判断一下是否满足构成三角形的条件.

10. BC　【解析】已知不等式变形得 $\cos A+1\geqslant\frac{b}{c}+1$，即 $\cos A\geqslant\frac{b}{c}$①，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，代入①得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant\frac{b}{c}$，整理得 $b^2+a^2\leqslant c^2$，当 $b^2+a^2=c^2$ 时，△ABC 为直角三角形；当 $b^2+a^2<c^2$ 时，可得 $\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}<0$，即 C 为钝角，此时△ABC 为钝角三角形. 综上，△ABC 的形状为直角三角形或钝角三角形. **故选 BC.**

方法总结　利用余弦定理判断三角形的形状的思路

(1)化边为角，再进行三角恒等变换，求出角之间的关系.

(2)化角为边，再进行代数恒等变换，求出三条边之间的关系.

一般地，若遇到的式子含角的余弦或边的二次式，则要考虑用余弦定理.

注意：统一成边的关系后，等式两边不要轻易约分，否则可能会出现漏解.

能力上分

1. B　【解析】因为 $AB>CA>BC$，所以角 C 与角 A 分别为 $\triangle ABC$ 的最大角与最小角，

提示：先由三边大小关系判断最大角与最小角，再利用余弦定理求出第三个角，由三角形内角和即可求解

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\times BC}=\dfrac{9+4-7}{12}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $0°<B<180°$，所以 $B=60°$，故 $A+C=180°-60°=120°$. **故选** B.

2. C　【解析】由余弦定理可得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C$，$\because\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，$\therefore AB^2=16+9-2\times4\times3\times\dfrac{2}{3}=9$，故 $AB=3$，

故 $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{9+9-16}{2\times3\times3}=\dfrac{1}{9}$.

故选 C.

3. C　【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}=\dfrac{2ab\cos C}{2bc\cos A}$，

整理得 $\cos A=\cos C$，

又 $A,C\in(0,\pi)$，函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，所以 $A=C$，

所以 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形. **故选** C.

4. B　【解析】因为 $m>\dfrac{3}{2}$，所以 $BC-AC=5m-(m+6)=4m-6>0$，

所以 $5m>m+6$，即 $BC>AC$，又 $5m>3m>0$，即 $BC>AB$，所以 $\triangle ABC$ 的三个内角中角 A 最大，

则由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{(3m)^2+(m+6)^2-(5m)^2}{2\times3m(m+6)}<0$，得 $(5m+6)(m-2)>0$，则 $m>2$.

又因为 $m+6>5m-3m$，所以 $m<6$，

所以 m 的取值范围是 $(2,6)$. **故 B 正确.**

5. C　【解析】由 $6b c\cos A=-2a c\cos B$ 得 $3b\cos A=-a\cos B$①，

由 $-2a c\cos B=-3ab\cos C$ 得 $2c\cos B=3b\cos C$②，

将 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$代入①②,化简得

$a^2=b^2+2c^2$③,

$a^2=5c^2-5b^2$④,

联立③④得 $b^2+2c^2=5c^2-5b^2\Rightarrow 6b^2=3c^2\Rightarrow c^2=2b^2$,

代入③得 $a^2=b^2+2(2b^2)=5b^2$,

则 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+2b^2-5b^2}{2b\cdot\sqrt{2}b}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{3\pi}{4}$. **故选 C.**

6. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$ **【解析】**由已知 $b^2+c^2-a^2\geqslant bc$,

结合余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$,

又 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减且 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,所以 $0<A\leqslant\frac{\pi}{3}$.

7. $\frac{\pi}{6}$ **【解析】**因为 $2a\cos B=c-a$,由余弦定理得 $2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c-a$,

整理得 $c=\frac{b^2}{a}-a$,所以$\frac{c+4a}{b}=\frac{\frac{b^2}{a}-a+4a}{b}=\frac{b}{a}+\frac{3a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{3a}{b}}=2\sqrt{3}$,

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{3a}{b}$,即 $b=\sqrt{3}a$ 时,等号成立,

$\frac{c+4a}{b}$取最小值,此时 $c=\frac{b^2}{a}-a=2a$,

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3a^2+4a^2-a^2}{2\sqrt{3}a\cdot 2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

8.【解】(1)因为 $(b+c)^2=a^2+bc$,整理得 $b^2+c^2-a^2=-bc$,

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$,又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由 $A=\frac{2\pi}{3}$, $a=\sqrt{3}$ 及余弦定理 $a^2=$

$b^2+c^2-2bc\cos A$ 得，$b^2+c^2+bc=3$，

所以 $(b+c)^2-bc=3$，又 $bc\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}$，所以 $(b+c)^2\leqslant4$，显然 $b+c>0$，

所以 $0<b+c\leqslant2$，当且仅当 $b=c=1$ 时取等号，

又 $b+c>a=\sqrt{3}$，所以 $\sqrt{3}<b+c\leqslant2$，

所以 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(2\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$.

课时 2　正弦定理

对点上分

1. B　【解析】在 $\triangle ABC$ 中，因为 $B+C=60°$，所以 $A=120°$，所以 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin 120°}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，由正弦定理以及比例式的性质可得 $\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{a+b-c}=\frac{\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. **故 B 正确.**

2. D

攻略上分　本题为已知两角及一边解三角形，符合通法攻略 24 中的类型.

【解析】因为 $\angle BAC=60°$，$\angle ABC=75°$，所以 $\angle ACB=180°-60°-75°=45°$，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，即 $\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，解得 $BC=2\sqrt{3}$. **故选 D.**

3.【解】在 $\triangle ABC$ 中，因为 $b=\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{6}$，$\cos A=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin A=\frac{4}{5}$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{5}$.

4. D　【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$A=60°$，$AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，由正弦定理 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，即 $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sin B}$，解得 $\sin B=\frac{1}{2}$，又 $AC<BC$，

所以 $B<A$,即 $0°<B<60°$,所以 $B=30°$. **故 D 正确.**

易错警示 **忽略三角形中大边对大角而致错**

已知三角形的两边及其中一边的对角,利用正弦定理求另一边的对角时,由于三角形内角的正弦值都为正,所以当所得内角的正弦值大于 0 且小于 1 时,这个内角可能为锐角,也可能为钝角,因此需要根据题中的隐含条件来判断角的情况.

方法总结 (1)若已知两边和其中一边的对角,利用正弦定理解三角形时,需要判断三角形有几个解,防止漏解或多解.(2)判断三角形解的个数时可以选择代数法,也可以根据条件画出图形,通过图形直观判断.

5.【**解**】由正弦定理得 $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{2\sqrt{3}\sin 30°}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $c>b$,$B=30°$,所以 $30°<C<180°$,所以 $C=60°$或 $C=120°$.

①当 $C=60°$时,$A=90°$.

此时 $a^2=b^2+c^2=12+4=16$,所以 $a=4$.

②当 $C=120°$时,$A=30°$.

所以 $A=B$,所以 $a=b=2$.

综上所述,$C=60°$,$A=90°$,$a=4$ 或 $C=120°$,$A=30°$,$a=2$.

6. BC

攻略上分 本题为已知三角形的部分情况判断三角形解的个数,可利用通法攻略 25 求解.

【**解析**】由 $b>a$ 得 $B>A$,此时三角形显然不存在,**故 A 错误;**

由正弦定理得$\dfrac{1}{\sin 30°}=\dfrac{4}{\sin B}$,则 $\sin B=2$,显然角 B 不存在,**故 B 正确;**

由正弦定理得$\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$,所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,因为 $b>a$,所以 $B>A$,故 $B=60°$或 $B=$

$120°$，**故 C 正确**；

若 $A=60°$，$a=b=2$，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形，唯一确定，**故 D 错误**.

7. C 【解析】$\triangle ABC$ 中满足条件的角 A 有两个不同的值，即三角形有两解，根据三角形解的个数有两个，$a=6$，$b=x$，$B=\frac{\pi}{3}$，可得 $x>6\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$，且 $x<6$，所以 $3\sqrt{3}<x<6$. **故 C 正确.**

8. D 【解析】因为 $B=\frac{\pi}{4}$，$b=6\sqrt{2}$，所以由正弦定理可得，$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{a}{12}$，

当 $0<a\leqslant b=6\sqrt{2}$ 时，$A\leqslant B$，A 有一解，即 $\triangle ABC$ 有一解，

当 $6\sqrt{2}<a<12$ 时，$A>B$，A 有两解，即 $\triangle ABC$ 有两解，

当 $a=12$ 时，$\sin A=1$，$A=\frac{\pi}{2}$，A 有一解，即 $\triangle ABC$ 有一解，当 $a>12$ 时，$\sin A>1$，A 无解，即 $\triangle ABC$ 无解.

综上所述，若 $\triangle ABC$ 有一解，则实数 a 的取值范围是 $(0,6\sqrt{2}]\cup\{12\}$.

9. A

攻略上分 本题可观察到不等式 $a>2b$ 两边是齐次的边长关系，故可利用通法攻略 26 将其转化为角的关系，进而判断求解.

【解析】由 $a>2b$ 及正弦定理，得 $\sin A>2\sin B$. 因为 $\sin B=\sin(\pi-B)=\sin(A+C)$，所以 $\sin A>2\sin(A+C)$. 反之亦成立，所以“$a>2b$”是“$\sin A>2\sin(A+C)$”的充要条件. **故 A 正确.**

10. B 【解析】已知

$$\frac{a\sin A+b\sin B-c\sin C}{a\sin B}=2\sin C,$$

则由正弦定理得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=2\sin C$，

由余弦定理可得 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，

代入上式可得 $\frac{2ab\cos C}{ab}=2\sin C$，

即 $\cos C=\sin C$，则 $\tan C=1$，因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$，**故 B 正确.**

11. B　【解析】在 $\triangle ABC$ 中，若 $3a=2\sqrt{3}b\sin A$，利用正弦定理得 $3\sin A=2\sqrt{3}\sin B\sin A$.

因为 $\sin A\neq0$，故 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由于 $0<B<\pi$，故 $B=\frac{\pi}{3}$ 或 $B=\frac{2\pi}{3}$，又由于 $\cos B=\cos C$，所以 $B=C$，故 $B=\frac{\pi}{3}$，

所以 $B=C=A=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形. **故 B 正确.**

方法总结 判断三角形的形状就是根据已知条件判断三角形是否为某些三角形(如锐角、直角、钝角、等腰、等边三角形等). 这类题目的解答通常有以下两种思路:

(1)化边为角:根据正弦定理把已知条件中边和角的混合关系转化为角的关系,再进行三角恒等变换,得到角的三角函数值或角的三角函数值之间的关系,进而得到三角形的角与角的关系,从而确定三角形的形状;

(2)化角为边:根据正弦定理把已知条件中边和角的混合关系转化为边的关系,然后通过整理得到边与边之间的数量关系,从而确定三角形的形状. 在运用上述两种方法时,都不应随便约去公因式,以免漏解.

12. C　【解析】因为 $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C<0$，所以 $\sin^2A+\sin^2B<\sin^2C$，

由正弦定理角化边得 $a^2+b^2<c^2$，

即 $a^2+b^2-c^2<0$，故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$.

因为 $0<C<\pi$，所以 C 是钝角，即 $\triangle ABC$ 是钝角三角形. **故 C 正确.**

13. B　【解析】由题意知 $\frac{a^2-c^2}{2R}=(a-b)\cdot\sin B$，由 $\frac{b}{\sin B}=2R$ 得 $a^2-c^2=ab-b^2$，

结合余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，

由 $0<C<\pi$ 得 $C=\frac{\pi}{3}$.

因为 $\sin B=2\sin A$，所以 $b=2a$，

又 $c=2$，所以由余弦定理得 $2^2=a^2+4a^2-2\cdot a\cdot 2a\cos\frac{\pi}{3}=3a^2$，解得 $a^2=\frac{4}{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 2a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，**故 B 正确.**

14. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ **【解析】**$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，

$\therefore \frac{1}{2}ac\sin\angle ABC=\frac{1}{2}c\cdot BD\sin\angle ABD+\frac{1}{2}a\cdot BD\sin\angle CBD$，

$\therefore \frac{1}{2}ac\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}c\times1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\times1\times1$，

$\therefore \sqrt{3}ac=c+2a$，$\therefore \sqrt{3}=\frac{1}{a}+\frac{2}{c}$，

$\therefore 2a+c=\frac{1}{\sqrt{3}}(2a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{c}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(2+\frac{4a}{c}+\frac{c}{a}+2\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\times(4+4)=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $\frac{4a}{c}=\frac{c}{a}$，且 $\sqrt{3}ac=c+2a$，即 $c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立.

15.【解】(1)因为 $(a+c)\sin A-b\sin B=(a+b+c)\sin C$，

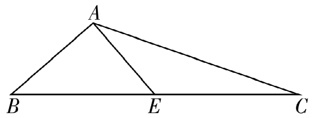
所以由正弦定理得 $a^2+ac-b^2=ac+bc+c^2$，整理可得 $b^2+c^2-a^2=-bc$，

由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$，

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由(1)可知，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，

若 $AE\perp AB$，则 $\angle CAE=\frac{\pi}{6}$.



易知 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ACE}$，所以 $\frac{1}{2}c\times AE=\frac{1}{2}b\times AE\times\frac{1}{2}$，可得 $b=2c$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-$

$2bc\cos A$，即 $14^2=4c^2+c^2-4c^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

解得 $c=2\sqrt{7}$，

在 Rt $\triangle ABE$ 中，由勾股定理得 $AE=\sqrt{BE^2-AB^2}=\sqrt{49-28}=\sqrt{21}$.

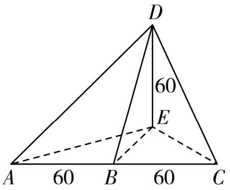
课时 3　余弦定理、正弦定理应用举例

对点上分

1. A　【解析】如图所示，由题意有 $\theta=\angle DCE$，$DE=AB=BC=60$，$\angle DAE=\angle DBE=45°$，

则有 $AE=BE=AB=60$，故 $\angle EAB=60°$，则在 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理得 $EC=\sqrt{60^2+120^2-2\times60\times120\times\cos 60°}=60\sqrt{3}$，

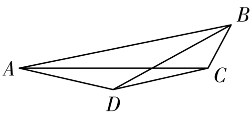
故 $DC=\sqrt{DE^2+EC^2}=\sqrt{60^2+(60\sqrt{3})^2}=120$，则 $\sin\theta=\sin\angle DCE=\frac{DE}{DC}=\frac{1}{2}$. **故 A 正确.**



2. C　【解析】由题意可知，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 $BC=AB=100$ m，在 $\triangle BCD$ 中，$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$，即 $\frac{60}{\sin 30°}=\frac{100}{\sin\angle BDC}$，得 $\sin\angle BDC=\frac{5}{6}$，$\sin\angle BDC=\sin\angle BDE=\cos\theta=\frac{5}{6}$. **故 C 正确.**

3. B　【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$AB=100$ mm，$BC=35$ mm，$\angle ACB=53.2°$，由余弦定理可得 $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot CA\cos 53.2°$，即 $100^2=35^2+AC^2-2\times35AC\cos 53.2°$，因为 $\sin 53.2°\approx0.8$，所以 $\cos 53.2°\approx0.6$，解得 $AC\approx117$ mm 或 $AC\approx-75$ mm（舍），所以 $AA_0=A_0C-AC=A_0B_0+BC-AC\approx100+35-117=18$（mm）. **故 B 正确.**

4. D　【解析】如图所示.



在$\triangle BCD$中，$CD=80$ m，$\angle BDC=15^\circ$，$\angle BCD=\angle ACB+\angle DCA=120^\circ+15^\circ=135^\circ$，$\therefore \angle CBD=30^\circ$.

在$\triangle BCD$中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin 135^\circ}=\frac{80}{\sin 30^\circ}$，解得$BD=80\sqrt{2}$ m.

在$\triangle ACD$中，$CD=80$ m，$\angle DCA=15^\circ$，$\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC=135^\circ+15^\circ=150^\circ$，$\therefore \angle CAD=15^\circ$，$\therefore AD=CD=80$ m.

在$\triangle ABD$中，由余弦定理得$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=80^2+(80\sqrt{2})^2-2\times80\times80\sqrt{2}\times\cos 135^\circ=80^2\times5$，$\therefore AB=80\sqrt{5}$ m，即A，B两点间的距离为$80\sqrt{5}$ m. **故 D 正确.**

方法总结　求距离问题时的注意事项

(1)选定或确定所求量所在的三角形. 若其他量已知，则直接解；若有未知量，则把未知量放在另一确定的三角形中求解.

(2)确定用正弦定理还是余弦定理，如果都可用，就选择更便于计算的定理.

5. A　【解析】由题意可得$OA=\sqrt{3}OP$，$OB=\frac{\sqrt{3}}{3}OP$，$OC=OP$，因为$\angle OBC+\angle OBA=\pi$，所以$\cos\angle OBC+\cos\angle OBA=0$，且$AB=BC=75$米. 在$\triangle OAB$中，由余弦定理可得$\cos\angle OBA=\frac{OB^2+BA^2-OA^2}{2OB\cdot BA}=\frac{\frac{1}{3}OP^2+75^2-3OP^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}OP\cdot75}$①，在$\triangle OBC$中，由余弦定理可得$\cos\angle OBC=\frac{OB^2+BC^2-OC^2}{2OB\cdot BC}=\frac{\frac{1}{3}OP^2+75^2-OP^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}OP\cdot75}$②，由①+②整理可得$2\times75^2=\left(4-\frac{2}{3}\right)OP^2$，解得$OP=15\sqrt{15}$米.

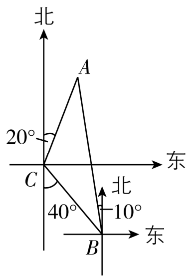
故 A 正确.

6. D　【解析】如图，设在A处两船相遇，则由题意得$\angle ACB=180^\circ-20^\circ-40^\circ=120^\circ$，

$\angle ABC=40^\circ-10^\circ=30^\circ$，所以 $\angle A=30^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 $AC=BC=20\sqrt{3}$ km.

由余弦定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=(20\sqrt{3})^2+(20\sqrt{3})^2-2\times20\sqrt{3}\times20\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3\ 600$，解得 $AB=60$ km.

因为海盗船的速度大小为 $20\sqrt{3}$ km/h，1 h 即可到达 A 处，所以海警船的速度大小至少是 60 km/h. **故 D 正确.**



7.【解】设缉私船追上走私船需要 t h，则 $CD=10\sqrt{3}t$，$BD=10t$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理知 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=6$，$\therefore BC=\sqrt{6}$. 在 $\triangle ABC$ 中，由 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle CAB}$，可得 $\sin\angle ABC=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\angle ABC=45^\circ$.

又 $\angle CBD=120^\circ$，在 $\triangle CBD$ 中，应用正弦定理，得 $\sin\angle BCD=\frac{BD\sin\angle CBD}{CD}=\frac{1}{2}$，$\therefore\angle BCD=30^\circ$，$\therefore\angle BDC=30^\circ$，$\therefore BD=BC=\sqrt{6}$，$\therefore 10t=\sqrt{6}$，$\therefore t=\frac{\sqrt{6}}{10}$.

因此，缉私船沿北偏东 60°的方向能最快追上走私船，所求时间为 $\frac{\sqrt{6}}{10}$ h.

6.1 节测上分

1. A 【解析】设 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\because\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，$\therefore$ 由正弦定理得 $a:b:c=2:3:4$，不妨设 $a=2k$，$b=3k$，$c=4k(k>0)$，则 A 是最小角，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9k^2+16k^2-4k^2}{2\times3k\times4k}=\frac{7}{8}$. **故 A 正确.**

2. D　【解析】因为 $\sin^2 A+\sin^2 B=2\sin^2 C$，由正弦定理可得 $a^2+b^2=2c^2$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}{2ab}\geqslant\frac{\frac{1}{2}\times 2ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，因为 $C\in(0,\pi)$ 且 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，所以 C 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$. **故 D 正确.**

3. D　【解析】由 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(b^2+c^2-a^2)$，得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot 2bc=\frac{\sqrt{3}}{2}bc\cos A$，即 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，可得 $\tan A=\sqrt{3}$.

又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

又已知 $b=4$，$c=3$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4^2+3^2-2\times 4\times 3\cos\frac{\pi}{3}=13$，解得 $a=\sqrt{13}$.

则外接圆直径 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{39}}{3}$.

故 D 正确.

4. B　【解析】因为 $b\cos C+c\cos B=4$，所以由射影定理得 $a=4$. 又因为 $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=3$，由正弦定理可得 $\frac{b+c}{a}=3$，且 $b=5$，即 $\frac{5+c}{4}=3$，解得 $c=7$，所以 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}=4\sqrt{6}$. **故 B 正确.**

5. B　【解析】因为 $a=2$，$A=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理得，$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{2}=\frac{\sqrt{3}b}{4}$. 当 $b=1$ 时，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}$，由 $b<a$ 且 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}<\frac{1}{2}$ 可知，$B<\frac{\pi}{6}$ 可得 $C>\frac{\pi}{2}$，**故 A 错误；**

当 $b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，$\sin B=1$，因为 $B\in(0,\pi)$，

所以 $B=\frac{\pi}{2}$，即 B 为直角，**故 B 正确；**

当 $b=\frac{3}{2}$ 时，$\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，由 $b<a$ 且 $\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{8}>\frac{1}{2}$ 可知，$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{3}$，所以 $C<\frac{\pi}{2}$，$\triangle ABC$ 是锐角三角形，**故 C 错误；**

当 $b=\frac{5}{3}, a=2, A=\frac{\pi}{3}$ 时，若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，则 $\triangle ABC$ 一定为等边三角形，但 $a\neq b$，显然矛盾，**故 D 错误.**

6. ABD 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由 $\sin A-b\sin B=(c+b)\sin C$ 及正弦定理得 $a-b^2=(c+b)c$，又 $a=1$，

则 $a^2=b^2+c^2+bc$，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$.

对于 A，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$，**故正确；**

对于 B，$1=b^2+c^2+bc\geqslant 3bc$，即 $bc\leqslant\frac{1}{3}$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{\sqrt{3}}{12}$，因此，$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$，**故正确；**

对于 C，$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，**故错误；**

对于 D，BC 边上的高 $h=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a}=2S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}$，**故正确.**

7. B 【解析】依题意，在 $Rt\triangle MAC$ 中，$AC=60$ m，$\tan\angle MCA=\frac{3}{4}$，则 $\cos\angle MCA=\frac{4}{5}$，

$CM=\frac{AC}{\cos\angle MCA}=\frac{60}{\frac{4}{5}}=75(\text{m})$.

在 $Rt\triangle BCN$ 中，$BC=70\sqrt{3}$ m，$\cos\angle NCB=\frac{14}{15}$，则 $CN=\frac{BC}{\cos\angle NCB}=\frac{70\sqrt{3}}{\frac{14}{15}}=75\sqrt{3}(\text{m})$.

在 $\triangle MNC$ 中，$\angle MCN=150°$，

则 $MN=$

$\sqrt{CM^2+CN^2-2CM\cdot CN\cdot\cos\angle MCN}=$

$\sqrt{75^2+(75\sqrt{3})^2-2\times75\times75\sqrt{3}\cos 150°}=$

$75\sqrt{7}$(m).

即塔尖 MN 之间的距离为 $75\sqrt{7}$ m.

故 B 正确.

8. $\frac{\pi}{3}$　3　【解析】$\because \sqrt{3}a\cos C=c\sin A$, $\therefore$ 由正弦定理可得 $\sqrt{3}\sin A\cos C=\sin C\sin A$, 又 A, $C\in(0,\pi)$, $\therefore \sin A\neq 0$, $\therefore \sqrt{3}\cos C=\sin C$, 即 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\sqrt{3}$, $\therefore C=\frac{\pi}{3}$. 由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, 即 $7=4+b^2-2b$, 解得 $b=3$ 或 $b=-1$(舍).

9. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$　【解析】根据题意由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, 又因为 $a=1$, $A=\frac{\pi}{6}$, 即 $1=b^2+c^2-\sqrt{3}bc\geqslant 2bc-\sqrt{3}bc=(2-\sqrt{3})bc$, 所以 $bc\leqslant\frac{1}{2-\sqrt{3}}$(当且仅当 $b=c$ 时等号成立), 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$, 即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

10.【解】(1) $\because a\sin C=c(2-\sqrt{3}\cos A)$, 由正弦定理得 $\sin A\sin C=\sin C(2-\sqrt{3}\cos A)$.

又 $\because C\in(0,\pi)$, $\therefore \sin C\neq 0$, $\therefore \sin A=2-\sqrt{3}\cos A$, 即 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$,

$\therefore 2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=2$, 即 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=1$,

$\because A\in(0,\pi)$, $\therefore A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$,

$\therefore A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, $\therefore A=\frac{\pi}{6}$.

(2) $\because a^2-b^2=c^2-6c$, $\therefore a^2=b^2+c^2-6c$,

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6c}{2bc}=\frac{3}{b}$, $\therefore \frac{3}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore b=2\sqrt{3}$. 又 $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=4\sqrt{3}$,

$\therefore \frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times c\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$,

$\therefore c=8$, $\therefore a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{12+64-2\times 2\sqrt{3}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{7}$.

11.【解】(1) 由题意知 $BD=CD=\frac{3}{2}$, 在

$\triangle ADB$ 中，由余弦定理可得，$\cos A=\dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\dfrac{4}{5}$，整理得 $20AD^2-64AD+35=0$，即 $(2AD-5)(10AD-7)=0$，所以 $AD=\dfrac{5}{2}$ 或 $AD=\dfrac{7}{10}$.

(2) 因为 $AD>AB$，由(1)得 $AD=\dfrac{5}{2}$，所以 $AC=AD+DC=4$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=4+16-2\times2\times4\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{36}{5}$，所以 $BC=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，由 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，$A\in(0,\pi)$，得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{3}{5}$. 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，则 $\dfrac{\frac{6\sqrt{5}}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{\sin\angle ACB}$，所以 $\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

12.【解】 (1) 因为 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，所以 $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})$，

即 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AE}^2=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，

即 $\overrightarrow{AE}^2=\dfrac{4}{9}\times4+\dfrac{1}{9}\times9+\dfrac{4}{9}\times2\times3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{37}{9}$，

即 $|\overrightarrow{AE}|=\dfrac{\sqrt{37}}{3}$，

故 AE 的长为 $\dfrac{\sqrt{37}}{3}$.

(2) 连接 BP，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\cdot\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}(1-\lambda)\overrightarrow{BC}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，

$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BD}+(1-\mu)\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\mu\overrightarrow{BA}+(1-\mu)\overrightarrow{BC}$，$\mu\in\mathbf{R}$，

即 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2}\mu,\\ \dfrac{1}{3}(1-\lambda)=1-\mu,\end{cases}$

解得 $\lambda=\dfrac{2}{5}$，$\mu=\dfrac{4}{5}$，

所以 $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$，

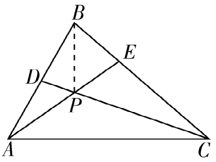
所以 $AP=\frac{3}{5}AE=\frac{\sqrt{37}}{5}$，$PC=\frac{4}{5}DC$，

在 $\triangle ADC$ 中，$DC=\sqrt{1+9-2\times1\times3\times\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$，所以 $PC=\frac{4\sqrt{7}}{5}$，在 $\triangle APC$ 中，

$\cos\angle APC=\frac{AP^2+PC^2-AC^2}{2AP\cdot PC}=\frac{\left(\frac{\sqrt{37}}{5}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{7}}{5}\right)^2-3^2}{2\times\frac{\sqrt{37}}{5}\times\frac{4\sqrt{7}}{5}}=-\frac{19\sqrt{259}}{518}$，

因为 $\angle APC+\angle CPE=180°$，

所以 $\cos\angle CPE=\frac{19\sqrt{259}}{518}$.



13.【解】(1) 根据正弦定理可知，$b^2+c^2=(2c\sin B+a)a$，

即 $b^2+c^2-a^2=2ac\sin B$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2ac\sin B}{2bc}=\frac{a\sin B}{b}$，

即 $b\cos A=a\sin B$，即 $\sin B\cos A=\sin A\sin B$，

即 $\sin B(\sin A-\cos A)=0$，

因为 $\sin B>0$，

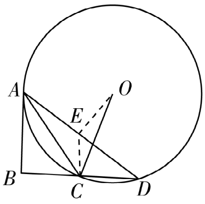
所以 $\sin A-\cos A=0$，即 $\tan A=1$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$.

(2) ①因为 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，所以 $b^2+c^2-4=\sqrt{2}bc\geqslant 2bc-4$，

解得 $bc\leqslant 4+2\sqrt{2}$，当且仅当 $b=c$ 时，等号成立，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{2}}{4}bc\leqslant 1+\sqrt{2}$，

即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $1+\sqrt{2}$.

②设 AD 的中点为 E，连接 OE，EC，如图所示，易知 $OE\perp AD$.



$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EO})\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{CA}^2)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}^2-\overrightarrow{CA}^2)=\frac{1}{2}(a^2-b^2)=2-\frac{1}{2}b^2.$

因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2\sqrt{2}$，所以 $b=2\sqrt{2}\sin B\leqslant 2\sqrt{2}$，

当且仅当 $B=\frac{\pi}{2}$ 时，等号成立，所以 $b^2\leqslant 8.$

故 $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AD}=2-\frac{1}{2}b^2\geqslant -2.$

综上，$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的最小值为-2.

6.2 平面向量在几何、物理中的应用举例

对点上分

1. C 【解析】$\because \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN})=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{3}{16}|AB|^2=\frac{1}{3}\times 9-\frac{3}{16}\times 16=0$，$\therefore AN\perp MN$，$\therefore \triangle AMN$ 是直角三角形. **故 C 正确.**

2. $\sqrt{3}$　$90°$　【解析】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，

则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，

$\therefore |\overrightarrow{AD}|^2=\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)^2=\frac{4}{9}\boldsymbol{a}^2+2\times\frac{2}{9}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{9}\boldsymbol{b}^2=\frac{4}{9}\times 9+2\times\frac{2}{9}\times 3\times 3\times\cos 120°+\frac{1}{9}\times 9=3$，$\therefore AD=\sqrt{3}$.

设 $\angle DAC=\theta$，则向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ.

$$\because \cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|}$$

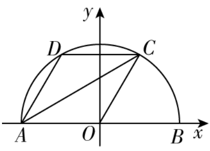
$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{3}\times 3}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\boldsymbol{b}^2+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times9+\frac{2}{3}\times3\times3\times\cos 120^\circ}{3\sqrt{3}}=0,$$

$\therefore \theta=90^\circ$，即$\angle DAC=90^\circ$.

3. (1)【**证明**】以 O 为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系.

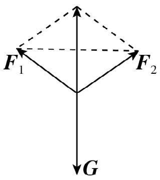


由题意可知 $OB=1$，$\angle COB=\frac{\pi}{3}$，则 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$D\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OC}$，且 A,D,C 三点不共线，所以 $AD/\!/OC$，且 $AD=OC$.

(2)【**解**】设点 C 在第一象限，$\angle COB=\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $C(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$D(-\cos\alpha,\sin\alpha)$，$|\overrightarrow{CD}|=2\cos\alpha$，$\triangle ACD$ 的 DC 边上的高为 $\sin\alpha$，所以$\triangle ACD$ 的面积为$\frac{1}{2}\times2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha$，当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$时，$\triangle ACD$ 的面积取得最大值，且最大值为$\frac{1}{2}$.

4. C　【**解析**】由题意，物体从点 $A(-1,3)$处移动到点 $B(2,6)$处，可得 $\overrightarrow{AB}=(3,3)$，因为力 $\boldsymbol{F}=(5,2)$，所以力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功为 $\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=5\times3+2\times3=21$. **故 C 正确.**

5. C　【**解析**】根据题意，作出辅助线及 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 合力，如图：



对于 A，由于 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{G}$，且 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|$，则有$|\boldsymbol{F}_1|\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{G}|$，又由$|\boldsymbol{G}|$为定值，故 θ 越小越省力，θ 越大越费力，**故 A 错误；**

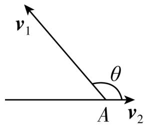
对于 B，θ 的取值范围是$[0,\pi)$，**故 B**

错误；

对于 C，当 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 时，有 $|\boldsymbol{F}_1|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{G}|$，变形可得 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{G}|$，**故 C 正确**；

对于 D，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，有 $|\boldsymbol{F}_1|\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{G}|$，变形可得 $\sqrt{2}|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{G}|$，**故 D 错误**.

6. AB 【解析】对于 A，如图①，设 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角为 θ，船行驶的时间为 t，$d=500\text{ m}=0.5\text{ km}$.

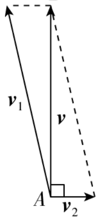


图①

当 θ 为钝角时，$t_1=\frac{d}{\sin(\pi-\theta)|\boldsymbol{v}_1|}=\frac{0.5}{10\sin\theta}=\frac{0.05}{\sin\theta}(\text{h})$；当 θ 为锐角时，$t_2=\frac{d}{\sin\theta|\boldsymbol{v}_1|}=\frac{0.5}{10\sin\theta}=\frac{0.05}{\sin\theta}(\text{h})$；当 θ 为直角时，$t_3=\frac{d}{|\boldsymbol{v}_1|}=\frac{0.5}{10}=0.05(\text{h})$. 则当 θ 为钝角时，$0<\sin\theta<1$，$t_1>0.05\text{ h}=t_3$；当 θ 为锐角时，$0<\sin\theta<1$，$t_2>0.05\text{ h}=t_3$. 所以当船垂直于河岸行驶，即 $\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2$ 时，所用时间最短，**故 A 正确**.

对于 B 和 C，由 A 可知，这艘船到达河对岸的渡河时间最短为 $t_3=0.05\text{ h}=0.05\times60\text{ min}=3\text{ min}$，**故 B 正确，C 错误**.

对于 D，如图②，设点 B 是河对岸一点，AB 与河岸垂直，那么当这艘船实际沿着 AB 方向行驶时，船的航程最短，由图②可知，设 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，则 $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{|\boldsymbol{v}_1|^2-|\boldsymbol{v}_2|^2}=4\sqrt{6}(\text{km/h})$，此时，船的航行时间 $t=\frac{d}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{0.5}{4\sqrt{6}}\times60=\frac{30}{4\sqrt{6}}\approx3.1(\text{min})>3(\text{min})$，**故 D 错误**.



图②

专题上分 5　正、余弦定理的综合应用

1. B　【解析】∵ $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$，∴ 由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$，再由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.

又 $A\in(0,\pi)$，∴ $A=\frac{\pi}{3}$.

∵ $a=2$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，∴ $4=b^2+c^2-bc\geqslant bc$，当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立，∴ $bc\leqslant 4$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$，∴ △ABC 面积的最大值为 $\sqrt{3}$. **故 B 正确.**

一题多解　∵ $A=\frac{\pi}{3}$，$a=2$，根据大招攻略"'补圆术'速解面积最值问题"可得当三角形为等边三角形时，三角形的面积最大，此时 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a\cdot a=\sqrt{3}$，∴ △ABC 的面积的最大值为 $\sqrt{3}$. **故 B 正确.**

2. $4(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

攻略上分　已知边 a 以及角 A 的正切值(一边及其对角)，求周长的最大值，符合"补圆术"的使用情境.

【解析】因为 $a=4\sqrt{2}$，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=2\sqrt{2}>0$，所以 A 为锐角，又 $\sin^2A+\cos^2A=1$，

解得 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos A=\frac{1}{3}$

提示：目前已知一边及其对角，求三角形周长的最大值，根据大招攻略可知，当 $b=c$ 时，三角形周长最大

设 $b=c=x$，根据余弦定理得 $\cos A=\frac{1}{3}=\frac{x^2+x^2-(4\sqrt{2})^2}{2\cdot x\cdot x}$，解得 $x=2\sqrt{6}$(负值舍去)，所以△ABC 周长的最大值为 $4(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

一题多解 因为 $a=4\sqrt{2}$，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=2\sqrt{2}>0$，所以 A 为锐角，又 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，解得 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos A=\frac{1}{3}$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可得 $32=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{3}=(b+c)^2-\frac{8bc}{3}$，且 $b+c>4\sqrt{2}$，

所以 $(b+c)^2=32+\frac{8bc}{3}\leqslant 32+\frac{2}{3}\times(b+c)^2$，

提示：求周长最大值，需要求出 $b+c$ 的最大值，利用基本不等式转化成关于 $b+c$ 的不等式

解得 $4\sqrt{2}<b+c\leqslant 4\sqrt{6}$，当且仅当 $b=c=2\sqrt{6}$ 时等号成立，所以 $\triangle ABC$ 的周长 $L=a+b+c\leqslant 4(\sqrt{2}+\sqrt{6})$，即 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 $4(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

3. **攻略上分** 第(2)问在求出 b 之后，可以利用基本不等式的变形公式和余弦定理求周长的取值范围，具体可见通法攻略 27.

【解】(1)因为 $(a+b)(\sin A-\sin B)=(a-c)\sin C$，

所以由正弦定理可得 $(a+b)(a-b)=(a-c)c$，即 $ac=a^2+c^2-b^2$，

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 $2\sqrt{3}$，

所以由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=2\sqrt{3}$，

则 $b=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，

由余弦定理得 $9=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$，

所以 $(a+c)^2-9=3ac\leqslant 3\times\frac{(a+c)^2}{4}$，所以 $\frac{1}{4}(a+c)^2\leqslant 9$，所以 $a+c\leqslant 6$，当且仅当 $a=c=3$ 时，等号成立，

由三角形的性质知 $3<a+c\leqslant 6$，

所以 $6<a+b+c\leqslant 9$，故 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(6,9]$.

4. BC　【解析】因为 $a\cos A=b\cos B$，由余弦定理可得，$\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}=\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac}$，

所以有 $a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$，整理可得 $(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$，

所以 $a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$，故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形，**故 A 错误.**

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $A+B>\frac{\pi}{2}$，故 $\frac{\pi}{2}>A>\frac{\pi}{2}-B>0$，

由正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，得 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，**故 B 正确.**

若 $\triangle ABC$ 有一个解，则 $a\sin B=b$ 或 $b\geqslant a$，所以 $b=3$ 或 $b\geqslant 2\sqrt{3}$，**故 C 正确.**

$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，$BD=1$，

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}$，结合角平分线性质和三角形面积公式，

得 $\frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}a\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}c\sin\frac{\pi}{3}$，即 $ac=a+c$，得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$，

所以 $4a+c=(4a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}+5\geqslant 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{4a}{c}}+5=4+5=9$，

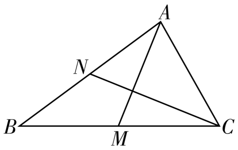
当且仅当 $\frac{c}{a}=\frac{4a}{c}$，即 $c=2a=3$ 时，取等号，**故 D 错误.**

5. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$　【解析】因为 A 为锐角，$b=\sqrt{3}a\sin B$，所以由正弦定理可得 $\sin B=\sqrt{3}\sin A\sin B$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B>0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，由等面积法可得 $\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}bc\sin A$，可得 $h=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}bc}{a}$，则

$\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{3}bc}{3a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{bc}{b^2+c^2-2bc\cos A}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot$

$\frac{bc}{2bc-\frac{2\sqrt{6}}{3}bc}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{6-2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，所以 $\frac{h}{a}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.

6.【解】（1）如图所示，



因为 M,N 分别为边 BC,AB 的中点，

所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，又因为 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=0$，

则 $\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=0$，

整理得 $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2=0$，

即 $c^2-bc\cos\angle BAC-2b^2=0$.

由余弦定理可知 $\cos\angle BAC=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

则 $c^2-bc\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-2b^2=0$，

所以 $5b^2=c^2+a^2$.

（2）因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，

所以 $\begin{cases}\cos\angle BAC=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0,\\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0,\\ \cos\angle ACB=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}>0,\end{cases}$

即 $b^2+a^2>c^2$，$b^2+c^2>a^2$，$a^2+c^2>b^2$，

又因为 $5b^2=c^2+a^2$，则 $3a^2>2c^2$，$3c^2>2a^2$，

可得 $\frac{2}{3}<\frac{c^2}{a^2}<\frac{3}{2}$，即 $\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{6}}{2}$，则

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-\frac{1}{5}(a^2+c^2)}{2ac}=\frac{2}{5}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$.

令 $t=\frac{c}{a}$，则 $\frac{\sqrt{6}}{3}<t<\frac{\sqrt{6}}{2}$，可得 $\cos B=\frac{2}{5}\left(t+\frac{1}{t}\right)$，

令 $f(t)=t+\frac{1}{t}$，$\frac{\sqrt{6}}{3}<t<\frac{\sqrt{6}}{2}$，可知 $f(t)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 上单调递增，且 $f(1)=2$，$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{6}}{6}$，

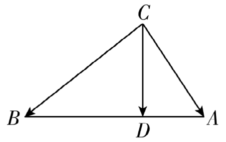
可得 $2\leqslant t+\frac{1}{t}<\frac{5\sqrt{6}}{6}$，

即 $\frac{4}{5}\leqslant\cos B<\frac{\sqrt{6}}{3}$，

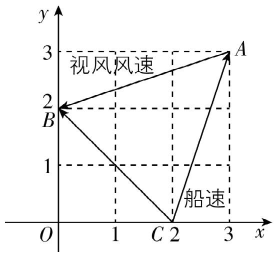
所以 $\cos B$ 的取值范围为 $\left[\frac{4}{5},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

真题上分

1. B 【解析】如图，因为点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$，所以 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+3(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$，**故选 B.**



2. A 【解析】如图，设点 $A(3,3)$，$B(0,2)$，$C(2,0)$，由题意知，视风风速对应的向量为 $\overrightarrow{AB}$，船速对应的向量为 $\overrightarrow{CA}$，因为船行风风速对应的向量与船速对应的向量为相反向量，所以船行风风速对应的向量为 $\overrightarrow{AC}$，则真风风速对应的向量为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=(-2,2)$，$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$，而 $2\sqrt{2}\in(1.6,3.3)$，故该时刻的真风为轻风．**故选 A.**



3. D 【解析】$\because|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$\therefore|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2=4$，$\therefore OA\perp OB$ 且点 A，B 在以点 O 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆上，$\therefore|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}|$，$\therefore|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|^2=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2+4\overrightarrow{OC}^2-4(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+4\overrightarrow{OC}^2-4(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=104-4(\overrightarrow{OA}+

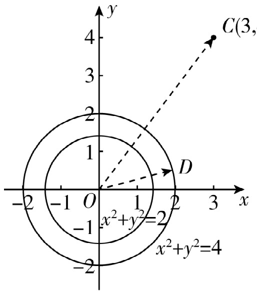
$\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}$.

令 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，则点 D 在以点 O 为圆心，2 为半径的圆上，$\therefore(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OC}|\cos\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\rangle=10\cos\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\rangle$.

$\because\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\rangle\in[0,\pi]$，$\therefore(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}\in[-10,10]$，

$\therefore|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|^2=104-4(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}\in[64,144]$，

$\therefore|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|\in[8,12]$. **故选 D.**

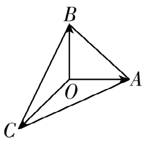


4. C 【解析】由题可得 $\boldsymbol{a}=(x+1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x,2)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $(x+1)\cdot x+2x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-3$，**故 A 错误，C 正确.**

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $2(x+1)=x^2$，即 $x^2-2x-2=0$，解得 $x=1\pm\sqrt{3}$，**故 B，D 错误.**

故选 C.

5. D 【解析】设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，如图.



因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$，所以 $\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\angle ACB$.

由题意可知，$\angle AOC=\angle BOC=\dfrac{3\pi}{4}$，在 $\triangle AOC$ 中，由余弦定理得，$AC^2=OA^2+OC^2-2OA\cdot OC\cdot\cos\angle AOC=1^2+(\sqrt{2})^2-2\times1\times\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=5$，所以 $AC=BC=\sqrt{5}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{2}$，由余弦定理得，$\cos\angle ACB=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\dfrac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{4}{5}$，**故选 D.**

一题多解 因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，设$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1)$，则$\boldsymbol{c}=(-1,-1)$，则$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(1,2)$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=2\times1+1\times2=4$，又$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$，所以$\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$，**故选 D.**

6. $\sqrt{2}$　**【解析】**由题意得$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,1-2x)$，由$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，得$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，即$x+1-2x=0$，所以$x=1$，所以$\boldsymbol{a}=(1,1)$，故$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$.

一题多解 由$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，得$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，即$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，将$\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(x-1,2x)$代入，得$x^2+1=x(x-1)+2x$，解得$x=1$，所以$\boldsymbol{a}=(1,1)$，故$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$.

7. $\sqrt{3}$　**【解析】**$\begin{cases}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3},\\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|,\end{cases}$

两式分别平方，得

$\begin{cases}|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3,\\|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2,\end{cases}$

解得$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

8. A　**【解析】**根据余弦定理有$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\dfrac{6+4+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因为$0°<A<180°$，所以$A=45°$. **故选 A.**

9. C　**【解析】**$\because b^2=\dfrac{9}{4}ac$，$\therefore$由正弦定理可得$\sin^2B=\dfrac{9}{4}\sin A\sin C$.

$\because B=60°$，$\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

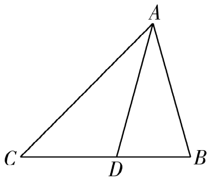
$\therefore \dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}\sin A\sin C$，$\therefore \sin A\sin C=\dfrac{1}{3}$.

由余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$，将$b^2=\dfrac{9}{4}ac$代入整理得，$a^2+c^2=\dfrac{13}{4}ac$，$\therefore$由正弦定理得$\sin^2A+\sin^2C=\dfrac{13}{4}\sin A\sin C$，则$(\sin A+\sin C)^2=$

$\sin^2A+\sin^2C+2\sin A\sin C=\frac{13}{4}\sin A\sin C+2\sin A\sin C=\frac{21}{4}\sin A\sin C=\frac{21}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{4}$,

$\therefore\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$或$-\frac{\sqrt{7}}{2}$(舍). **故选 C.**

10. 2 【解析】解法一：如图，在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin 60°}$，则$\sin C=\frac{AB\sin 60°}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又$\angle BAC=60°$，所以$0<C<120°$，所以$C=45°$. 所以$B=180°-C-\angle BAC=180°-45°-60°=75°$.



又AD平分$\angle BAC$，所以$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$，所以$\angle ADB=180°-B-\angle BAD=75°=B$，故$\triangle ABD$为等腰三角形，所以$AB=AD=2$.

解法二：设$AD=x$，$AC=y$，在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$，即$y^2-2y-2=0$，解得$y=1+\sqrt{3}$(舍负)，又$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ADC}$，所以$\frac{1}{2}\times2\times(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})x\cdot\frac{1}{2}$，解得$x=2$.

解法三：在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{4+AC^2-6}{4AC}=\frac{1}{2}$，所以$AC=1+\sqrt{3}$(舍负).

在$\triangle ABD$中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，所以$\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{BD}$.

在$\triangle ACD$中，由正弦定理得$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，所以$\frac{\sin\angle ADC}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{CD}$，又$AD$平分$\angle BAC$，所以$\sin\angle BAD=\sin\angle CAD$，又$\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，

提示：$\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以正弦值相等

所以$\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CD}$,所以$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$,

另解:由角平分线定理可得$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$

且$BD+CD=\sqrt{6}$,所以$BD=\dfrac{2\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

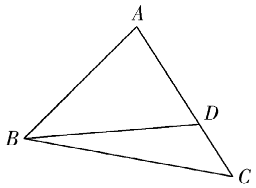
在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$\cos\angle ABC=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{4+6-(1+\sqrt{3})^2}{4\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,在$\triangle ABD$中,由余弦定理得$\cos\angle ABD=\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\dfrac{2^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-AD^2}{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,解得$AD=2$(舍负).

点拨:本题多次运用余弦定理和正弦定理,在计算AD时,不用$\cos\angle BAD=\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}$建立方程的原因是分子分母都出现了$AD$,这样可以减少计算量

11. (1)【证明】在$\triangle ABC$中,$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

由正弦定理得$BD\cdot b=ac$.

又$b^2=ac$,所以$BD=b$.



(2)【解】因为$AD=2DC$,$AC=b$,所以$AD=\dfrac{2}{3}b$,$CD=\dfrac{1}{3}b$.

在$\triangle ABD$中,由余弦定理得$\cos A=\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\dfrac{c^2+\frac{4}{9}b^2-b^2}{2c\cdot\frac{2}{3}b}=\dfrac{9c^2-5b^2}{12bc}$.

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2cb}$.

所以$\dfrac{9c^2-5b^2}{12bc}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2cb}$,整理得$6a^2+3c^2-11b^2=0$.

又 $b^2=ac$，所以 $6a^2+3c^2-11ac=0$，

解得 $a=\frac{3c}{2}$ 或 $a=\frac{c}{3}$.

又因为 $b^2=ac>(a-c)^2$，解得 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}c<a<\frac{3+\sqrt{5}}{2}c$，所以 $a=\frac{3c}{2}$.

所以在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$\cos\angle ABC=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac{9c^2}{4}+c^2}{2\times\frac{3c}{2}\cdot c}-\frac{1}{2}=\frac{13}{12}-\frac{1}{2}=\frac{7}{12}.$$

素养上分

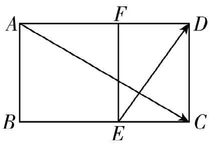
1. ACD　【解析】设空速向量为 $\boldsymbol{a}$，风速向量为 $\boldsymbol{b}$，地速向量为 $\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，所以 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,4)+(1,-1)=(4,3)$，所以 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，所以地速大小为 5 m/s，**故 A 正确**；

由 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{c}=(4,3)$ 可知地速向量的方向与空速向量的方向不相同，**故 B 错误**；

由于纵向偏移量为 4 m/s，与标准值无偏差，**故 C 正确**；

由于无人机计划沿 x 轴正方向为线路巡检，而地速向量为 $\boldsymbol{c}=(4,3)$，所以需要调整飞行姿态，**故 D 正确. 故选 ACD.**

2. $\sqrt{2}-1$　【解析】如图，由已知 $AB=\sqrt{2}$，$BC>AB$，得 $CD=AB=\sqrt{2}$，由白银比例可知 $EC:CD=1:\sqrt{2}$，所以 $EC=1$，则 $BC=AD=1+\sqrt{2}$，则 $EC:AD=1:(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}-1$.



又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}=(\sqrt{2}-1)\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{2}+1$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot[(\sqrt{2}-1)\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}]=(\sqrt{2}-2)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2+(\sqrt{2}-

1) $\overrightarrow{AD}^2=-(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-1)\times(1+\sqrt{2})^2=\sqrt{2}-1$.

3.【解】(1)在$\triangle BCD$中,由正弦定理知

$$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD},$$

所以$\dfrac{BD}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}$,解得$BD=6$.

若选条件①,

因为$\angle BCD=\dfrac{2\pi}{3}$,$\angle CBD=\dfrac{\pi}{4}$,

所以$\angle BDC=\dfrac{\pi}{12}$,所以$\angle BDE=\dfrac{\pi}{2}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BDE$中,$BE=\sqrt{BD^2+DE^2}=10$.

故服务通道BE的长度为10 km.

若选条件②,

在$\triangle BDE$中,由余弦定理的推论知

$$\cos\angle DBE=\frac{BD^2+BE^2-DE^2}{2BD\cdot BE}=\frac{3}{5},$$

化简得$5BE^2-36BE-140=0$,

解得$BE=10$或$BE=-\dfrac{14}{5}$(舍).

故服务通道BE的长度为10 km.

(2)在$\triangle ABE$中,由余弦定理知,$BE^2=BA^2+AE^2-2BA\cdot AE\cdot\cos\angle BAE$,

所以$100=BA^2+AE^2+BA\cdot AE$,

所以$(BA+AE)^2-BA\cdot AE=100$,即$(BA+AE)^2-100=BA\cdot AE\leqslant\dfrac{(BA+AE)^2}{4}$,

当且仅当$BA=AE$时,等号成立,

此时$\dfrac{3}{4}(BA+AE)^2=100$,即$BA+AE$的最大值为$\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ km.

4. D

思路导引 由已知可得$\dfrac{PQ}{BP}+\dfrac{PQ}{CP}=1$,利用角平分线定理以及正弦定理可推出$1=\dfrac{\sin\angle ABQ+\sin\angle PCQ}{\sin\angle PQC}=\dfrac{\sin\angle ABQ+\sin\angle PCQ}{\sin(60°+\angle ABQ)}$,化简可得$\sin\angle PCQ=\sin(60°-\angle ABQ)$,即可求得答案.

【解析】如图,由题意可知AP为$\angle BAC$的

平分线，故 $\frac{PQ}{PB}=\frac{AQ}{AB}=\frac{\sin\angle ABQ}{\sin\angle AQB}$，$\frac{PQ}{PC}=\frac{\sin\angle PCQ}{\sin\angle PQC}$.

由 $\frac{1}{BP}+\frac{1}{CP}=\frac{1}{PQ}$，可得 $\frac{PQ}{BP}+\frac{PQ}{CP}=1$，

于是 $\frac{PQ}{PB}+\frac{PQ}{PC}=\frac{\sin\angle ABQ}{\sin\angle AQB}+\frac{\sin\angle PCQ}{\sin\angle PQC}$

$=1=\frac{\sin\angle ABQ+\sin\angle PCQ}{\sin\angle PQC}$

$=\frac{\sin\angle ABQ+\sin\angle PCQ}{\sin(60°+\angle ABQ)}$，

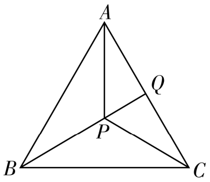
即 $\sin\angle ABQ+\sin\angle PCQ=\sin(60°+\angle ABQ)$，

化简可得 $\sin\angle PCQ=\sin(60°-\angle ABQ)$，

于是 $\angle PCQ=60°-\angle ABQ$ 或 $\angle PCQ+60°-\angle ABQ=180°$（舍去），

故 $\angle BPC=\angle PQC+\angle PCQ=\angle ABQ+\angle BAC+\angle PCQ=120°$.

故选 D.



第二章 全章上分

1. C 【解析】∵ $|a|=|b|=2$，$a\cdot b=2$，

∴ $|a-b|=\sqrt{a^2+b^2-2a\cdot b}=\sqrt{2^2+2^2-2\times2}=2$. **故 C 正确.**

2. C 【解析】∵ 向量 $b=(1,2)$，∴ $|b|=\sqrt{5}$，又 a 为单位向量，$a\cdot b=2$，∴ $a\cdot(b-a)=a\cdot b-a^2=2-1=1$，$(b-a)^2=b^2-2a\cdot b+a^2=5-2\times2+1=2$，即 $|b-a|=\sqrt{2}$，

∴ $\cos\langle a,b-a\rangle=\frac{a\cdot(b-a)}{|a||b-a|}=\frac{1}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∵ $\langle a,b-a\rangle\in[0,\pi]$，∴ $\langle a,b-a\rangle=\frac{\pi}{4}$.

故 C 正确.

3. D 【解析】∵ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，∴ $\cos A+\cos B=\frac{a+b}{c}$ 即 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a+b}{c}$，则 $a(b^2+c^2-$

$a^2)+b(a^2+c^2-b^2)=2ab(a+b)$，则 $ab(a+b)=c^2(a+b)-(a+b)(a^2-ab+b^2)$，则 $ab=c^2-a^2-b^2+ab$，则 $c^2=a^2+b^2$，则△ABC 是直角三角形. **故 D 正确.**

4. B 【解析】连接 AD（图略），由 B,D,C 三点共线，D 是 BC 的中点，得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

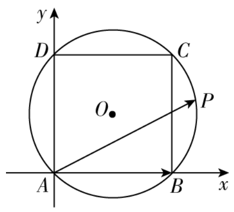
令 $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AC}$，由 M,D,N 三点共线，B 是 AM 的中点，可设 $\overrightarrow{AD}=y\overrightarrow{AM}+(1-y)\overrightarrow{AN}=2y\overrightarrow{AB}+x(1-y)\overrightarrow{AC}$.

则有 $\begin{cases}2y=\frac{1}{2},\\x(1-y)=\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$，$\frac{AN}{NC}=2$. **故选 B.**

5. C 【解析】如图，以 A 为坐标原点，AB，AD 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(1,0)$.

设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x,y)$. 因为 $\overrightarrow{AB}=(1,0)$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=x$. 由题意知，圆 O 的半径 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为点 P 在 $\overset{\frown}{BC}$（包括端点）上，所以 $1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left[1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$. **故 C 正确.**



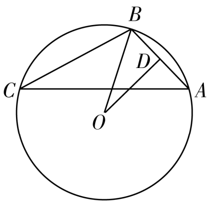
6. A 【解析】在△ABC 中，由余弦定理及 $b\cos A+a\cos B=2$，可得 $b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2$，解得 $c=2$. 由 $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$，得 $(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})^2=\overrightarrow{CA}^2$，即 $c^2+a^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=b^2$，又 $a=3,b=4,c=2$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}$. 如图，取 AB 的中点 D，连接 OD，则

$OD\perp AB$，则 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|^2=2$，同理可得 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2=\frac{9}{2}$，而 $\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，

则有 $\begin{cases}\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=x\,\overrightarrow{BA}^2+y\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC},\\ \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+y\,\overrightarrow{BC}^2,\end{cases}$

即 $\begin{cases}4x-\frac{3}{2}y=2,\\ -\frac{3}{2}x+9y=\frac{9}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{11}{15},\\ y=\frac{28}{45},\end{cases}$ 则 $x+y=\frac{61}{45}$. **故 A 正确.**



7. D 【解析】$AB=2,AC=5,\angle BAC=60°$，由余弦定理可得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC}=\sqrt{4+25-2\times2\times5\cos 60°}=\sqrt{19}$.

因为 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以 $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC)}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(4+25+2\times2\times5\times\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{39}}{2}$. 由余弦定理可得 $\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4+19-25}{2\times2\times\sqrt{19}}=-\frac{1}{2\sqrt{19}}$.

由 $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，可得 $|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC)}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[4+19+2\times2\times\sqrt{19}\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{19}}\right)\right]}=\frac{\sqrt{21}}{2}$. 由重心的性质可得 $AP=\frac{2}{3}AM=\frac{\sqrt{39}}{3}$，$BP=\frac{2}{3}BN=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

在 $\triangle APB$ 中，由余弦定理可得

$\cos\angle APB=\dfrac{AP^2+BP^2-AB^2}{2AP\cdot BP}=\dfrac{\dfrac{39}{9}+\dfrac{21}{9}-4}{2\cdot\dfrac{\sqrt{39}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{3}}=\dfrac{4\sqrt{91}}{91}$. **故 D 正确.**

8. A 【解析】设正八边形 $ABCDEFGH$ 的中心为 O，$OA=a$，在 $\triangle OAB$ 中，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{4}$，$OA=OB=a$，由余弦定理得 $2a^2-2a^2\cos\dfrac{\pi}{4}=(2\sqrt{2-\sqrt{2}})^2$，得 $a=2$.

在 $\triangle OBH$ 中，$\angle BOH=\dfrac{\pi}{2}$，由勾股定理得 $BH^2=8$，所以 $BH=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle BEH}=\dfrac{1}{2}BH\cdot(2+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$.

设 $|\overrightarrow{PE}|=m$，$|\overrightarrow{PB}|=n$，$|\overrightarrow{PH}|=t$，因为 $\angle EPH=\angle BPH=\angle BPE=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $S_{\triangle BEH}=S_{\triangle PEH}+S_{\triangle PBH}+S_{\triangle PBE}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(mn+mt+nt)=2+2\sqrt{2}$，所以 $mn+mt+nt=\dfrac{8(1+\sqrt{2})}{\sqrt{3}}=\dfrac{8(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{3}$，所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PE}=-\dfrac{1}{2}(mn+mt+nt)=-\dfrac{4(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{3}$. **故 A 正确.**

9. BCD 【解析】由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径），所以 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$，当 $A=\dfrac{\pi}{2}$，$B=C=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$A:B:C=2:1:1$，但是 $a:b:c=\sqrt{2}:1:1$，**故 A 错误；**

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，**故 B 正确；**

$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R=\dfrac{a}{\sin A}$，**故 C 正确；**

若 $A>B$，则 $a>b$，所以 $\sin A>\sin B$，**故 D 正

确.

10. CD　【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,即$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$,

所以$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$,所以不一定有$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,**故 A 错误;**

设$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,

所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{2|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{3}$,

$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,因为$0°\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle\leqslant180°$,所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的夹角是$30°$,**故 B 错误;**

$\boldsymbol{a}=(2,-3)$,$\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{4}\right)$,因为$-\dfrac{3}{4}\times2-\dfrac{1}{2}\times(-3)=0$,所以$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,**故 C 正确;**

$\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(1,1)$,$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,2+\lambda)$,因为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$的夹角为锐角,

所以$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=1+\lambda+2(2+\lambda)=5+3\lambda>0$且$1\times(2+\lambda)-2(1+\lambda)\neq0$,

解得$\lambda>-\dfrac{5}{3}$且$\lambda\neq0$,**故 D 正确.**

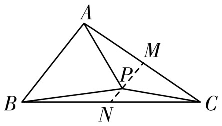
11. ACD　【解析】由P为$\triangle ABC$的垂心,可得$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$,**故 A 正确;**

如图①,设AC中点为M,BC中点为N,连接PM,PN,

则$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}+4\overrightarrow{PN}=\mathbf{0}$,

即$\overrightarrow{PM}=-2\overrightarrow{PN}$,所以点$P$为中位线$MN$上靠近点$N$的三等分点,所以$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABP}}=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}}=2$,**故 B 错误;**

快解:由"奔驰定理"得$S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PAC}:S_{\triangle PAB}=1:2:3$,所以$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle PAB}=6:3=2:1$



图①

设 BC 中点为 H，则 $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

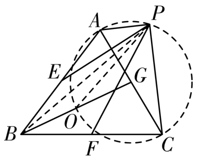
结合题设得 $\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AP}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}$，

所以 $\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}=-|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{BC}|=0$，

所以 $HP\perp BC$，又 BC 的中点为 H，

所以 P 在 BC 的垂直平分线上，所以动点 P 的轨迹经过 $\triangle ABC$ 的外心，**故 C 正确；**

如图②，设 BG 中点为 O，



图②

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，所以点 P 的轨迹为以 AC 为直径的圆，连接 BP，PO，则 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BP})=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP}\right)=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{BP}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{BP}\right)=\left(\overrightarrow{BO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{BP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{BP}\right)=\left(\overrightarrow{PO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\right)=|\overrightarrow{PO}|^2-\frac{1}{4}$，

快解：连接 EF（图略），易知 $EF=1$，且 O 为 EF 的中点，则由极化恒等式可直接得到 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=|\overrightarrow{PO}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{EF}|^2=|\overrightarrow{PO}|^2-\frac{1}{4}$

故当 PO 为直径，即 $PO=2$ 时，$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$

有最大值 $4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$，故 D 正确.

12. $\frac{1}{3}$　【解析】因为 D 是 AC 的中点，所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，所以 $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})=\frac{1}{4}\left(c^2+a^2+2\times c\times a\times\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}$，即 $a^2+c^2+ac=13$.

又 $c=a+2$，所以 $a^2+(a+2)^2+a(a+2)=13$，解得 $a=1$(舍去负值)，所以 $c=3$.

由 D 是 AC 的中点，可知 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CBD}$，即 $\frac{1}{2}AB\cdot BD\sin\angle ABD=\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin\angle CBD$，所以 $\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CBD}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$.

13. $2\sqrt{3}$　【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$，即 $-\frac{1}{2}=\frac{8+BC^2-AC^2}{2\times2\sqrt{2}\times BC}$，可得 $BC^2-AC^2=-2\sqrt{2}BC-8$①.

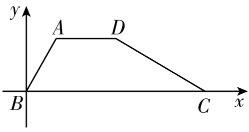
在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $\cos D=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，即 $\frac{1}{2}=\frac{8+CD^2-AC^2}{2\times2\sqrt{2}\times CD}$，可得 $CD^2-AC^2=2\sqrt{2}CD-8$②.

因为 $S_1=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times BC\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}BC$，$S_2=\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin D=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times CD\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}CD$，所以 $S_2-S_1=\frac{\sqrt{6}}{2}CD-\frac{\sqrt{6}}{2}BC=\frac{\sqrt{6}}{2}(CD-BC)$③.

由②－①得 $CD^2-AC^2-BC^2+AC^2=2\sqrt{2}CD-8+2\sqrt{2}BC+8$，可得 $CD^2-BC^2=2\sqrt{2}(CD+BC)$，可得 $(CD+BC)(CD-BC)=2\sqrt{2}(CD+BC)$，因为 $CD+BC>0$，所以 $CD-BC=2\sqrt{2}$，代入③得 $S_2-S_1=\frac{\sqrt{6}}{2}(CD-BC)=\frac{\sqrt{6}}{2}\times2\sqrt{2}=2\sqrt{3}$.

14. $\frac{1}{3}$　$\frac{3}{4}$　【解析】建立以 B 点为坐标原

点的平面直角坐标系，如图，则 $B(0,0)$，$A(1,\sqrt{3})$，$C(6,0)$.



设 $D(x,\sqrt{3})$，由 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda(6,0)=(6\lambda,0)$，得 $x=6\lambda+1$.

因为 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-2$，$\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{3})$，所以 $(6\lambda,0)\cdot(-1,-\sqrt{3})=-6\lambda=-2$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，所以 $D(3,\sqrt{3})$.

①当 M 在 N 的左侧时，设 $M(x_M,0)$，$x_M\in[0,5]$，则 $N(x_M+1,0)$，则 $\overrightarrow{AM}=(x_M-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DN}=(x_M-2,-\sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN}=x_M^2-3x_M+5$，$\therefore(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN})_{\min}=\dfrac{11}{4}$；

②当 M 在 N 的右侧时，设 $N(x_N,0)$，$x_N\in[0,5]$，则 $M(x_N+1,0)$，则 $\overrightarrow{AM}=(x_N,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DN}=(x_N-3,-\sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN}=x_N^2-3x_N+3$，$\therefore(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN})_{\min}=\dfrac{3}{4}$.

综上 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为 $\dfrac{3}{4}$.

15.【解】(1) 在矩形 $ABCD$ 中，F 为 CD 的中点，E 为 AD 上靠近点 A 的三等分点，所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. 因为 $\overrightarrow{EG}=\lambda\overrightarrow{GF}$，所以 $\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BE}=\lambda(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BG})$，可得 $(1+\lambda)\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BE}+\lambda\overrightarrow{BF}$. 根据点 G 在 BD 上，设 $\overrightarrow{BG}=k\overrightarrow{BD}=k(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$ $(0<k<1)$，所以 $(1+\lambda)k(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\lambda\left(\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)=\left(1+\dfrac{1}{2}\lambda\right)\overrightarrow{BA}+\left(\dfrac{1}{3}+\lambda\right)\overrightarrow{BC}$，可得 $\begin{cases}(1+\lambda)k=1+\dfrac{1}{2}\lambda,\\(1+\lambda)k=\dfrac{1}{3}+\lambda,\end{cases}$ 解得 $\lambda=\dfrac{4}{3}$，$k=\dfrac{5}{7}$.

(2) 因为 $AB\perp BC$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，由 (1) 的结论，可得 $\overrightarrow{BG}=\dfrac{5}{7}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，所以 $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{5}{7}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)=\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}\right)=\frac{5}{7}\times\left(\frac{1}{2}+4\right)=\frac{45}{14}$.

16.【解】(1) 因为 $\frac{b}{c-a}+\frac{c}{b-a}=1$，所以 $b(b-a)+c(c-a)=(c-a)(b-a)$，所以 $b^2-ab+c^2-ac=bc-ac-ab+a^2$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$.

由余弦定理可得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$.

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r，则 $\pi r^2=\frac{7\pi}{3}$，解得 $r=\frac{\sqrt{21}}{3}$，

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=2r$，$a=2r\sin A=2\times\frac{\sqrt{21}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{7}$，

因为 $\sin B+\sin C=\frac{5\sqrt{7}}{7}\sin A$，所以由正弦定理得 $b+c=\frac{5\sqrt{7}}{7}a=5$，

由(1)知 $b^2+c^2-a^2=bc$，所以 $(b+c)^2-7=3bc$，得 $3bc=25-7=18$，则 $bc=6$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

17.【解】(1) 由 $A\in(0,\pi)$，且 $\cos A=\frac{2}{3}$，可得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

又因为 $4a=3b$，由正弦定理得 $4\sin A=3\sin B$，所以 $\sin B=\frac{4\sin A}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

(2) 由 $4a=3b$，可得 $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$，可设 $a=3k$，$b=4k$，其中 $k>0$，

因为 $c=3$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $9k^2=16k^2+9-2\times4k\times3\times\frac{2}{3}$,

即 $7k^2-16k+9=0$,解得 $k=1$ 或 $k=\frac{9}{7}$.

当 $k=1$ 时,$a=3,b=4$,此时△ABC 的周长为 $a+b+c=10$;

当 $k=\frac{9}{7}$时,$a=\frac{27}{7},b=\frac{36}{7}$,

此时△ABC 的周长为 $a+b+c=\frac{27}{7}+\frac{36}{7}+3=12$.

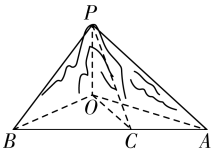
18.【解】(1)设 $OP=x$ km,在△PAO 中,因为 $\tan\angle PAO=\frac{PO}{AO}$,所以 $AO=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$.

同理,在△PBO 中,$BO=\frac{x}{\tan 45^\circ}=x$. 在△$AOB$ 中,由余弦定理得 $AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos\angle AOB=6x^2$,所以 $AB=\sqrt{6}x=60\times\frac{3}{60}=3$,解得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以此山的高 OP 为$\frac{\sqrt{6}}{2}$ km.

(2)由(1)及题意得 $BO=\frac{\sqrt{6}}{2},AO=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$AB=3,\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设 C 是线段 AB 上一动点,如图,连接 OC,PC,则在点 C 处观测 P 点的仰角为 $\angle PCO$,$\tan\angle PCO=\frac{OP}{OC}=\frac{\sqrt{6}}{2OC}$.



当 $OC\perp AB$ 时,OC 最短,此时由 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\sin\angle AOB=\frac{1}{2}AB\cdot OC$ 得 $OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\tan\angle PCO=\frac{\sqrt{6}}{2OC}\leqslant\sqrt{3}$ $\left(\text{当且仅当 } OC=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{时等号成立}\right)$,所以该车从 A 到 B 行驶过程中观测 P 点的仰角正切值的最大值为$\sqrt{3}$.

19.【解】(1)$\because \frac{a-c}{b-\sqrt{2}c}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A+\sin C}$,

$\therefore \dfrac{a-c}{b-\sqrt{2}c}=\dfrac{\sin B}{\sin A+\sin C}$,

$\therefore$ 根据正弦定理可得 $\dfrac{a-c}{b-\sqrt{2}c}=\dfrac{b}{a+c}$,

$\therefore a^2-c^2=b^2-\sqrt{2}bc$, $\therefore b^2+c^2-a^2=\sqrt{2}bc$,

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $A\in(0,\pi)$, $\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$.

(2)由(1)知 $A=\dfrac{\pi}{4}$,设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r, $\because a=\sqrt{2}$,

$\therefore$ 根据正弦定理可得 $2r=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$, $\therefore r=1=|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$.

又 $\angle AOB=2\angle ACB$, $\angle AOC=2\angle ABC$, $\angle BOC=2\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore |3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2=9+4+1+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+4\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=14+12\cos\angle AOB+6\cos\angle AOC+4\cos\angle BOC=14+12\cos(2\angle ACB)+6\cos(2\angle ABC)=14+12\cos\left[2\left(\dfrac{3\pi}{4}-\angle ABC\right)\right]+6\cos(2\angle ABC)=14-12\sin(2\angle ABC)+6\cos(2\angle ABC)=14-6\sqrt{5}\sin(2\angle ABC-\varphi)$,其中 $\tan\varphi=\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan\dfrac{\pi}{6}$,

易知 $2\angle ABC\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$,又 $\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\therefore 2\angle ABC-\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3\pi}{2}\right)$,

$\therefore$ 当 $2\angle ABC-\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\sin(2\angle ABC-\varphi)=1$, $|3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2$ 取得最小值 $14-6\sqrt{5}$, $\therefore |3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$ 的最小值为 $\sqrt{14-6\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$.

(3)在(2)的条件下可得 $a=\sqrt{2}$, $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $r=1$, $\angle BOC=\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore \triangle BOC$ 为直角边为 1 的等腰直角三角形.

设 BC 的中点为 F,连接 OF, PF(图略),则 $|OF|=|FC|=\dfrac{1}{2}|BC|=$

$\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆 O 上一动点，

$\therefore \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FB})\cdot(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FC})=(\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{FC})\cdot(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FC})=\overrightarrow{PF}^2-\overrightarrow{FC}^2=\overrightarrow{PF}^2-\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 当 $|PF|$ 最大时，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 取得最大值，而 $|PF|$ 最大时，$PF\perp BC$，

$\therefore |PF|$ 最大为 $r+|OF|=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值为 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\sqrt{2}+1$.

第三章　数学建模活动（二）略